序　　言

随着近代物理学和数学的发展，早在 1834 年由英国著名科学家 Russell 发现的“孤立波”现象，近十多年来引起了人们极大的关注和兴趣. 现在从数值计算、理论分析和物理实验等方面都已经证实，一大批非线性进化方程都存在着孤立子解. 这些孤立子间的相互作用具有非常奇特的现象，孤立子具有稳定的波形. 这些新现象被利用来解释物理上出现的一些新问题. 在数学上，也出现了散射反演、延拓结构、Bäcklund 变换等一些精确求解非线性进化方程特解的新方法，并已逐步形成了较为系统的有关孤立子问题的数学理论.

写这本书的主要目的是想对孤立子的基本问题和它的数学物理方法作一简要的介绍. 除了有关孤立子问题的最基本的知识和概念外，也介绍了一些有关这一研究方向的最近发展概况和最新成果. 我们希望这将有助于读者从浩瀚的著作和文献中，理出一些虽然比较粗但却足够明晰的线条，从而当读者对某一方面的问题发生兴趣时，就可在查阅有关参考文献的基础上开展研究工作.

下面简要介绍本书形成的始末. 1978 年，作者之一编写了题为“KdV 方程和孤立子”的讲义. 1979 年在全国有限元和孤立子会上，会议领导小组冯康、张学铭、屠规彰、李翊神等同志认为需要有一本介绍孤立子的书，并把编写此书的任务交给了作者. 此事还得到了科学出版社同志的积极支持. 于是作者便在“讲义”的基础之上开始了撰写工作，进一步查阅了有关资料，增加了原“讲义”的内容，补充了最新的一些文献，

并在数学方法和物理内容的结合上，作了一次新的尝试。但由于有关孤立子的理论问题涉及的知识十分广泛，且限于作者的水平，因此书中难免存在不妥或错误之处，敬请读者予以指正。

最后，我们要特别感谢屠规彰同志，他对编写本书给予了始终如一的关心和热情帮助，并提出了许多宝贵的意见。

作者

1984年2月于北京

目　录

第一章　绪　　论

第一节　孤立子的由来

1834 年英国科学家 Scott Russell 偶然观察到了一种奇妙的水波. 1844 年，他在《英国科学促进协会第14届会议报告》上发表的《论波动》一文中，对此现象作了生动的描述："我观察过一次船的运动，这条船被两匹马拉着沿狭窄的运河迅速前进着，突然，船停了下来，而被船所推动的大堆水却并不停止，它们积聚在船头周围激烈地扰动着，然后水浪突然呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰，它以巨大的速度向前滚动着，急速地离开了船头. 在行进中它的形状和速度并没有明显的改变，我骑在马上紧跟着观察，它以每小时约八、九英里的速度滚滚向前，并保持长约 30 英尺、高约 1—1.5 英尺的原始形状. 渐渐地它的高度下降了. 当我跟踪 1—2 英里后，它终于消失在逶迤的河道之中". 这就是 Russell 观察到的奇特现象，进而他认为这种孤立的波动是流体运动的一个稳定解，并称它为"孤立波". Russell 当时未能成功地证明并使物理学家们信服他的论断，从而埋怨数学家未能从已知的流体运动方程预言出这一现象，之后有关孤立波的问题在当时许多物理学家中引起了广泛的争论. 直到 60 年后的 1895 年，Korteweg, de Vries 研究了浅水波的运动，在长波近似和小振幅的假定下，建立了单向运动的浅水波运动方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^{2}+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x^{2}}\right) \quad (1.1)$$

这里，η 为波峰高度，l 为水深，g 为重力加速度，α,σ 均为常数. 他们对孤立波现象作了较为完整的分析，并从方程 (1.1) 求出了与 Russell 描述一致的，即具有形状不变的脉冲状的孤立波解，从而在理论上证实了孤立波的存在. 然而这种波是否稳定？两个孤立波碰撞后能否变形？这些问题一直没有得到解答，以致有些人怀疑，认为方程 (1.1) 是非线性偏微分方程，解的叠加原理不满足，碰撞后两个孤立波的形状很可能会破坏殆尽. 这种观点致使有不少人认为这种波"不稳定"，在没有新的发现之前，孤立波处于长期被埋没之中.

另外一个问题是，象 Russell 讲的这种孤立波是否在流体力学之外的其他物理领域中出现呢？在二十世纪的初叶这也是使人捉摸不定的问题. 一直到五十年代，由于 Fermi, Pasta 和 Ulam 的工作，才出现了新的局面. 他们将 64 个质点用非线性弹簧连接成一条非线性振动弦，初始时这些谐振子的所有能量都集中其一，其他 63 个的初始能量均为零. 按照经典的理论认为：只要非线性效应存在，就会有能量均分，各态历经等现象出现，即任何微弱的非线性相互作用，可导致系统由非平衡状态向平衡状态过渡. 但实际计算的结果却使他们大吃一惊，即上述达到能量平衡的观念是错误的。实际上，从图 1-1 可以看到，经过很长时间以后，几乎全部能量又回到了原先的初始分布，这就是著名的 FPU 问题. 当时由于只在频率空间来考察，未能发现孤立波解，所以该问题未得到正确的解释. 后来人们把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条，并近似模拟这种情况，Toda 研究了这种模式的非线性振动，果然得到了孤立波解，使 FPU 问题得到正确的解答，从而进一步激起了人们对孤立波研究的兴趣.

随后，1962 年 Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于研究基本粒子时，数值计算结果表明：这样的孤立波并

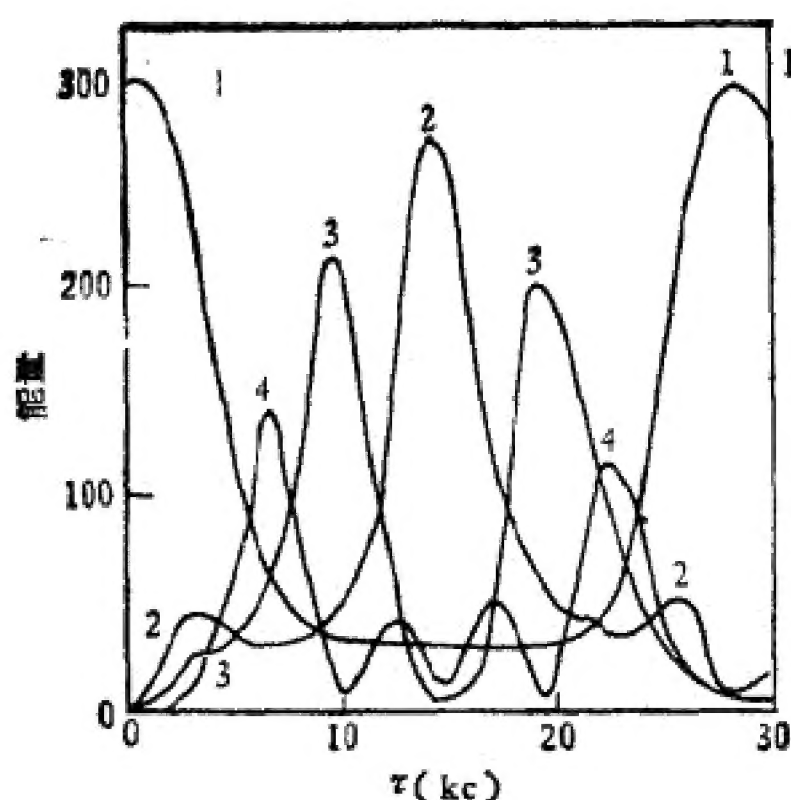


图 1-1　FPU 问题的能量曲线．单位任意，弦的初始形式是单正弦波．

不散开，即使两个孤立波碰撞后也仍保持原有的形状和速度．

1965 年美国著名科学家 Zabusky 和 Kruskal 用数值模拟方法详细地考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性相互作用过程，得到了比较完整和丰富的结果，并进一步证实了孤立子相互作用后不改变波形的论断．他们的这些结果使人们感到惊喜．

由于得到的上述结果，以及在许多物理模型中相继发现都存在这种碰撞后具有不改变波形的稳定的孤立波的事实，从而使许多物理学家和数学家对此产生了极大的兴趣和注意，开始掀起了对孤立子问题研究的热潮，并逐步形成了较为完整的孤立子理论．

那么，究竟什么是"孤立子"呢？通常我们把非线性发展方程的局部行波解，称为"孤立波"．所谓"局部的"，是指微分方程的解在空间的无穷远处趋于零或确定常数的情况．我们把这些稳定的孤立波，即通过相互碰撞后的、不见消失而且波

形和速度也不会改变或者只有微弱的改变（就像常见的两个粒子的碰撞一样）的孤立波称为“孤立子”. 但也有个别的文章和书把孤立子和孤立波混为一谈.

在物理上，也有把孤立子定义为经典场方程的一个稳定的有限能量的不弥散的解，即如果以 $\rho(x, t)$ 表示孤立子的能量密度，则有

$$0 < H = \int \rho(x, t) d^m x < +\infty \text{（其中 } m \text{ 为空间的维数），}$$

$$\lim_{t\to\infty} \max \rho(x, t) \neq 0 \text{（对某些 } x\text{）}$$

这就是说，孤立子可看成场能不弥散，一个有限的稳定“团块”，即使在运动或碰撞中，它也不受到破坏. 对于一大批非线性波动方程和方程组，它们的孤立子一般具有如图 1-2 中 (a)，(b)，(c)，(d) 四种形状，分别叫钟型（或波包型）、涡旋型（反钟型）、扭结型（结状）、反扭结型（反结状）.

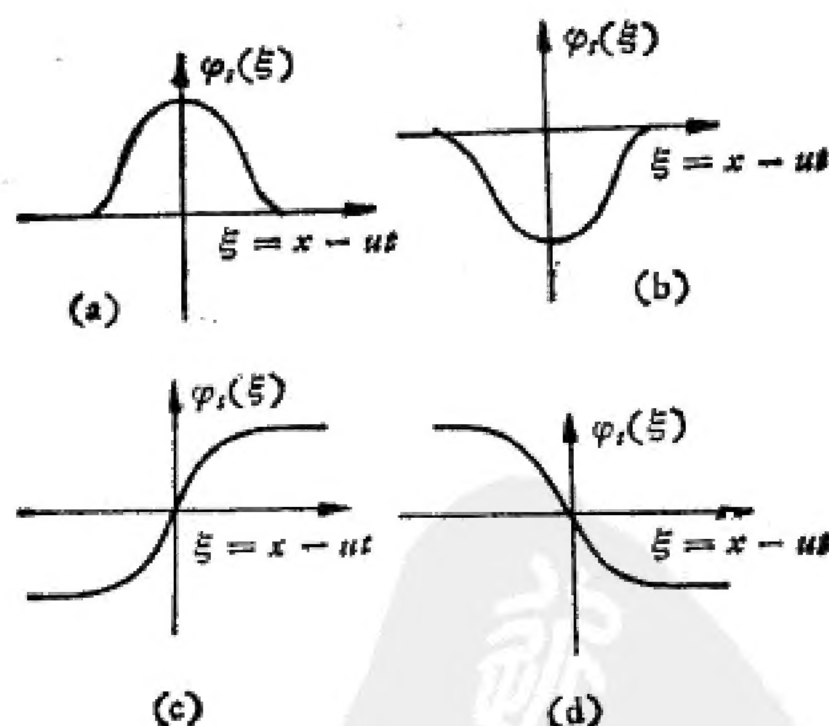


图 1-2 孤粒子类型.

$\varphi_t(\xi)$ 表示行波解，$\xi = x - ut$（u 是波速，为常数）.

李政道等人基于对基本粒子的研究，又把现有的孤立子

分成二类：拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子．关于它们的定义及详细情况我们将在第十章专门来阐述，并对李政道等人对非拓扑性孤立子的研究工作作一简要的介绍．

第二节 KdV 方程及其孤立子解

如前所述，1895 年 Korteweg 和 de Vries 建立了浅水波方程(1.1)，我们对它稍作改变，可得如下形式

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

其中，常数 μ 可正可负．若 $\mu < 0$ 时，作变换 $u \to -u$，$x \to -x$，$t \to t$，则(2.1)可变为

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxx} = 0 \tag{2.2}$$

因此恒可设 $\mu > 0$．人们将(2.1)称为 KdV 方程．

令 $u(x,t) = u(\xi)$，$\xi = x - Dt$，$D = \text{const}$，代入(2.1)，并对 ξ 积分二次可得

$$3\mu\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = -u^3 + 3Du^2 + 6Au + 6B = f(u) \tag{2.3}$$

其中，A，B 为积分常数．(2.3) 的解仅当 $f \geqslant 0$ 时才可能是实的 ($\mu > 0$)．如果 $f(u)$ 仅有一个实根，则它是无界的．现在我们设函数 $f(u)$ 有三个实根，即 $f(u) = -(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3)$，其中 $c_1 < c_2 < c_3$．由此推出：$D = \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3)$，$A = \frac{1}{6}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1)$，$B = \frac{1}{6}c_1c_2c_3$．函数 $f(u)$ 的一般形式如图 1-3 中的曲线 A 所示．(2.3) 的精确解能表为雅可比椭圆函数

$$u = u(x,t) = c_2 + (c_3 - c_2)c_n^2\left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12\mu}}\right.$$

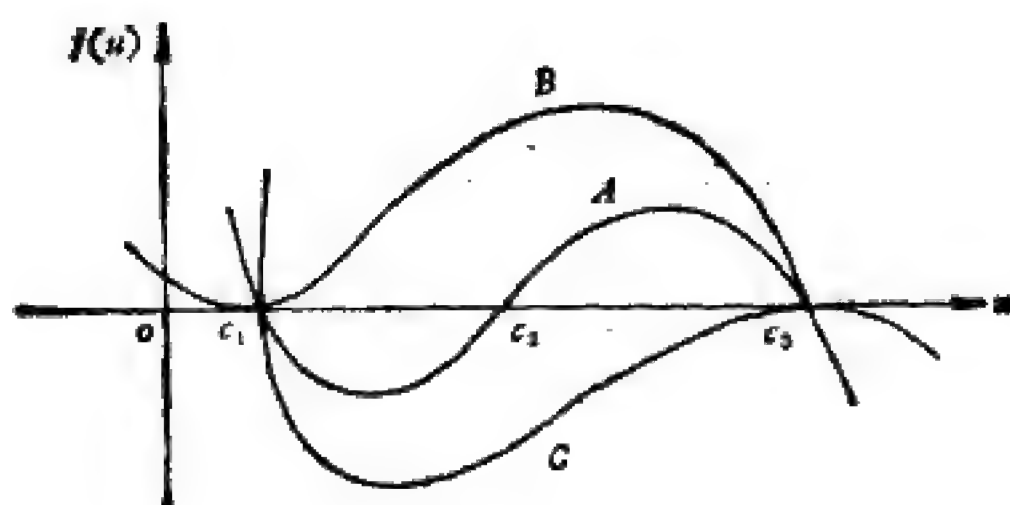


图 1-3

$$\left\{x-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right\};k\Bigg] \tag{2.4}$$

其中，$k^2=(c_3-c_2)/(c_3-c_1)$。周期波列方程(2.4)通常被称为"Cnoidal"波，因函数 cn 的实周期为 $2K$，K 为第一类椭圆积分，因此"Cnoidal"波的周期为 $T_p=4K\sqrt{\frac{3\mu}{c_3-c_1}}$。

当 $K=0$ 时，$\mathrm{cn}(\xi,0)=\cos\xi$，此时方程式(2.3)具有振动解

$$u=\bar{c}+a\cos\left[2\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right\}\right] \tag{2.5}$$

其中，$\bar{c}=\frac{c_2+c_3}{2}$，$a=\frac{c_3-c_2}{2}$。

当 $K=1$ 时，$\mathrm{cn}(\xi,1)=\mathrm{sech}\xi$；即当 $c_2\to c_1$ 时，如图 1-3 中曲线 B，此时周期变成无穷大，得到 KdV 方程(2.1)常见的孤立子解

$$u=c_1+(c_3-c_1)\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(2c_1+c_3)t\right\}\right]. \tag{2.6}$$

若设 $c_1=u_\infty$，$c_3-c_1=a$，则(2.6)变成

$$u = u_\infty + a\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{a}{12\mu}}\left\{x - \left(u_\infty + \frac{a}{3}\right)t\right\}\right] \quad (2.7)$$

这里，u_∞ 表示在无穷远处的均匀态，a 表示孤立子的振幅。从 (2.7) 可以看出，这种孤立波的相对于均匀态的速度，是正比于振幅的，而波的宽度反比于振幅的平方根，且振幅与均匀态无关。若 $u_\infty = 0$，$\mu = 1$，则从 (2.7) 可得

$$u(x,t) = 3D\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{D}{2}}\,(x - Dt) \quad (2.8)$$

如图 1-4 所示。

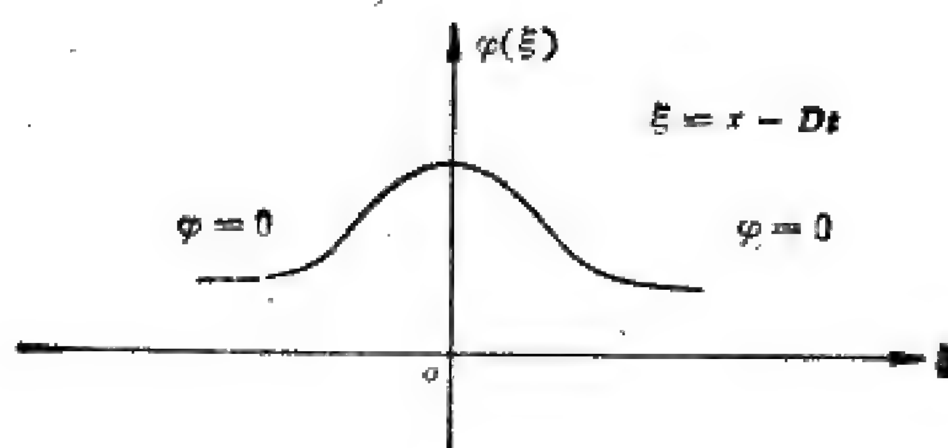


图 1-4

现在不断发现，相当广泛的一批描述弱非线性作用下的波动方程和方程组，在长波近似和小的且为有限的振幅假定下，均可归结为 KdV 方程。例如：(1) 冷等离子体的磁流体波的运动；(2)非谐振晶格的振动；(3)等离子体的离子声波；(4)在弹性杆中的纵向色散波动；(5)在液、气两种混合态的压力波运动；(6)在一个管底下部的流体的转动；(7)在低温下非线性晶格的声子波包的热激发等。

第三节 非线性 Schrödinger 方程及其他一些非线性进化方程的孤立子解

立方非线性 Schrödinger 方程为

$$iu_t + u_{xx} + \nu|u|^2u = 0 \tag{3.1}$$

或更一般的形式

$$u_t - \gamma u_{xx} = \chi u - \beta|u|^2u \tag{3.2}$$

其中，$\beta = \beta_0 + i\beta_1$，$\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$，$i = \sqrt{-1}$，$\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$，$\chi$，$\nu$ 均为实常数. 在许多物理问题中均发现此类方程. 例如，在细束流(非线性光学)中，有方程

$$2ik\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \nabla_\perp^2\Psi + \frac{n_2}{n_0}k^2|\Psi|^2\Psi = 0 \tag{3.3}$$

其中，$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial r}$，$m = 0$ 为平面；$m = 1$ 为柱对称. $\Psi = ae^{ik\theta}$，$\theta = kx - \omega t + ks(x, r)$，$k$ 为波数，$n = \frac{c_0k}{\omega} = n_0 + \frac{1}{2}n_2a^2$. 对于二维流，有方程

$$\frac{n_2}{n_0}k^2|\Psi|^2\Psi = -2ki\Psi_x - \Psi_{xx} - \Psi_{yy} \tag{3.4}$$

其他如：等离子体的 Langmuir 波；一维单色波的自调制；二维定态平面波的自聚焦；在非相对论下，超导电子对在电磁场中运动的 Ginzbug-Landau 方程等均可用非线性 Schrödinger 方程来描述.

现考虑方程(3.1)的行波解. 令

$$u(x,t) = e^{irx-ist}v(\xi), \quad \xi = x - Dt$$

其中，r，s 均为待定常数，$D = \text{const}$. 将此 u 的表达式代入(3.1)，可得 v 的常微分方程

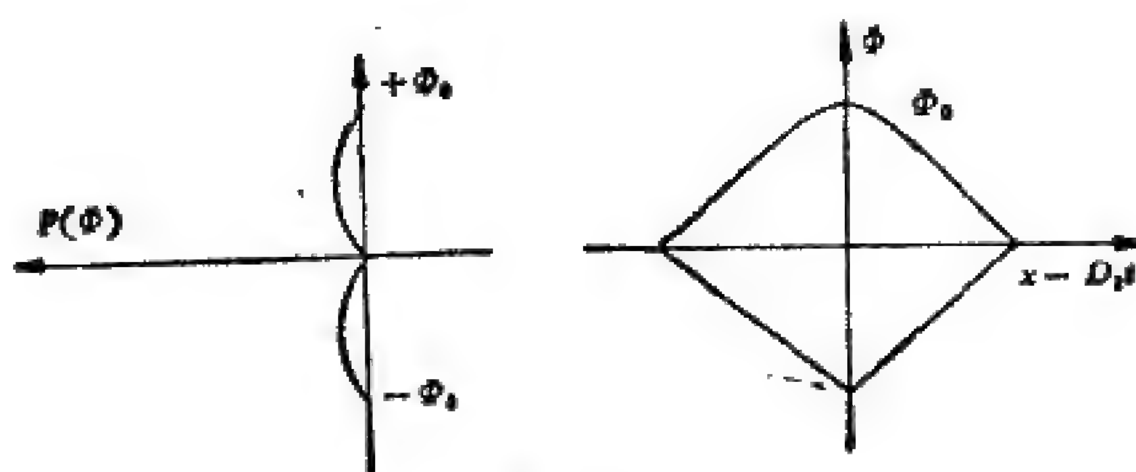


图 1-5

$$p(\Phi) = -\frac{\nu}{2}\Phi^4 + \frac{1}{4}(D_2^2 - 2D_1D_2)\Phi^2 + C$$

若 $C = 0$，$D_2^2 - 2D_1D_2 > 0$，$\Phi = 0$ 为 $p(\Phi) = 0$ 的二重根，还有二个根为 $\Phi = \pm\Phi_0$，$\Phi_0 = \sqrt{\dfrac{D_2^2 - 2D_1D_2}{2\nu}}$。此时

$$\Phi = \Phi_0 \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}}\,\Phi_0(x - D_2t)\right]$$

如图 1-5 所示。如果 $p(\Phi) < 0$，则不可能有行波解。若 $C \neq 0$，则当 $\left[\frac{1}{4}(D_2^2 - 2D_1D_2)\right]^2 + 2\nu C \geqslant 0$ 或

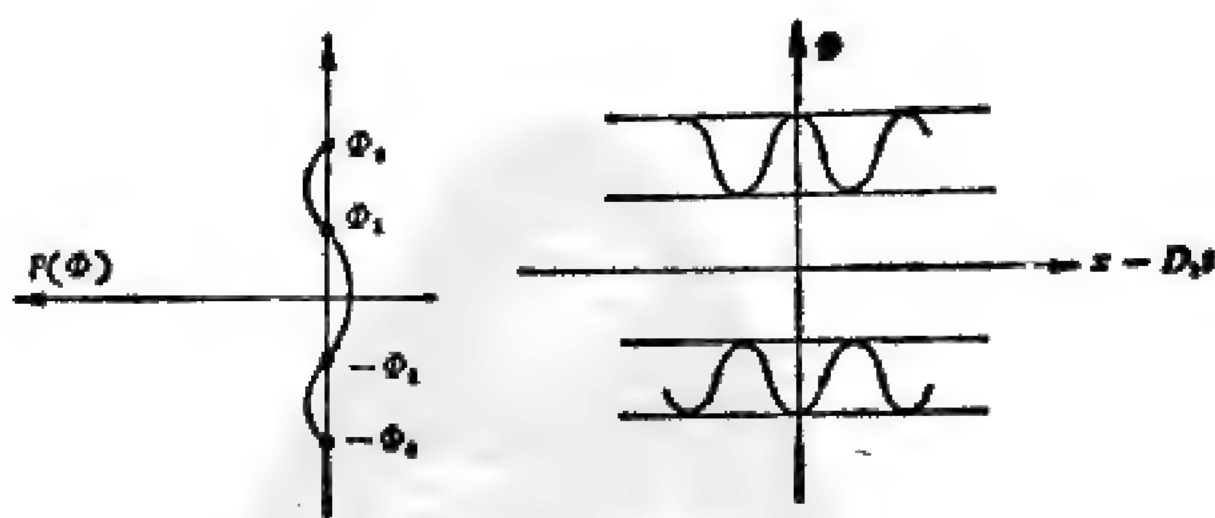


图 1-6

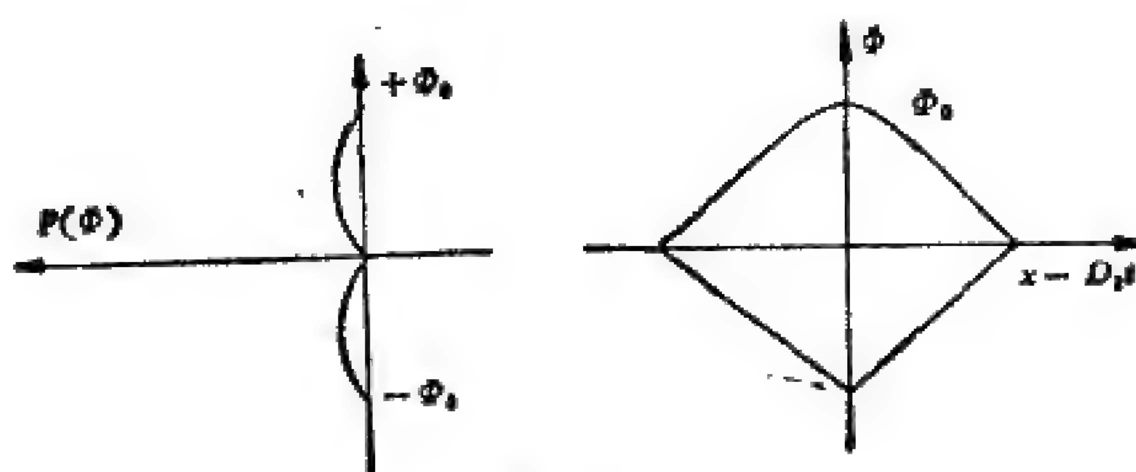


图 1-5

$$p(\Phi)=-\frac{\nu}{2}\Phi^4+\frac{1}{4}(D_2^2-2D_1D_2)\Phi^2+C$$

若 $C=0$, $D_2^2-2D_1D_2>0$, $\Phi=0$ 为 $p(\Phi)=0$ 的二重根，还有二个根为 $\Phi=\pm\Phi_0$, $\Phi_0=\sqrt{\frac{D_2^2-2D_1D_2}{2\nu}}$. 此时

$$\Phi=\Phi_0\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}}\Phi_0(x-D_2t)\right]$$

如图 1-5 所示。 如果 $p(\Phi)<0$, 则不可能有行波解。 若 $C\neq 0$, 则当 $\left[\frac{1}{4}(D_2^2-2D_1D_2)\right]^2+2\nu C\geqslant 0$ 或

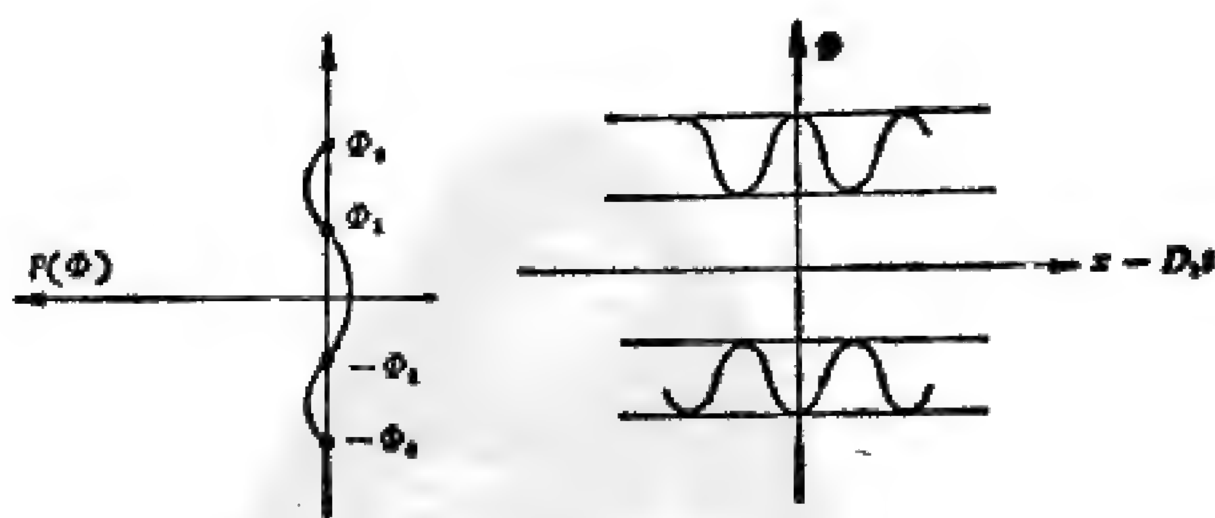


图 1-6

$$C > -\frac{1}{8\nu}\left(\frac{D_2^2}{2} - 2D_1D_2\right)$$

且 $C < 0$，则 $p(\Phi)$ 有单根 $\pm\Phi_1, \pm\Phi_2$，如图 1-6 所示．此时积分为椭圆函数

$$\Phi = \Phi_1\left[1 - \left\{\left(1 - \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2^2}\right)\mathrm{sn}^2\left[\frac{\sqrt{\nu}}{2}(x - D_2t)\right]\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

其中，椭圆函数 sn 具有 $\mathrm{mod}\, r = 1 - \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2^2}$.

其他如著名的 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{3.15}$$

有孤立子解

$$u = 4\mathrm{tg}^{-1}\pm\{\pm(1 - D^2)^{-\frac{1}{2}}(x - Dt)\} \tag{3.16}$$

当花括号内外均取正号时，表示从 $\Phi = 0(x = -\infty)$ 到 $\Phi = 2\pi(x = +\infty)$ 的正扭结；花括号内外均取负号时，表示从 $\Phi = -2\pi(x = -\infty)$ 到 $\Phi = 0$ $(x = +\infty)$ 的正扭结；当花括号内外取异号时，则表示反扭结，如图 1-7 所示．



图 1-7

具有孤立子解的其他非线性进化方程还有许多，例如非线性 Klein-Gordon 方程，Toda 非线性晶格方程，铁磁链方程，非线性电子滤波方程 Boussinesq 方程，Hirota 方程，Born-Infeld 方程等．

第四节　孤立子的实验观察及应用

孤立子的客观存在性早为 Russell 对水波的观察所证

实，除了数值计算得出的孤立子形象外，还在实验中不断地观察到. 例如，在七十年代初，Ikezi, Taylor 和 Baker 等人就在水箱实验中亲眼看到浅水波的 KdV 型孤立子的传播. 并和电子计算机的计算结果一致. 在激光打靶中，人们也观察到由于坍塌出现的涡旋性孤立波的传播以及激光光束在非线性介质中自聚焦时产生的孤立子. 最近美国新泽西州荷尔姆代贝尔电话实验室的 L. F. Mollenauer, R. H. Stolen 和 J. P. Gordon 在石英蕊光纤材料中观察到了光脉冲型孤立子的传播，这个结果与 J. Satsuma, N. Yajima 的数值计算结果相吻合.

另外，超导的 Josephson 效应，是当代物理学和电子技术中极为注意的课题之一，在构成 Josephson 结的两块超导材料中，超导电子对波函数的位相差 φ 满足 Sine-Gordon 方程，采用带有 Josephson 隧道结分路的超导传输线证实了孤立子解的存在性.

利用孤立子的理论，已经成功地解释了在激光打靶中多年来用经典理论未能解释的密度坑问题以及红外线外移问题. 最近，美国贝尔实验室已研究使用孤立波来改进信号传输系统，提高其传输率，即在传输中使之具有不损失波形、不改变速度、保真度高、保密性好等优点. 他们宣称在其光纤维的孤立波传输实验中已取得了可喜进展，这些实践工作无疑会推动孤立子理论研究工作的开展，并使得具有更为坚实的基础.

第五节　孤立子理论问题的研究

由于孤立子问题在大量非线性物理中出现，并具有某些共同的特征，因而已引起许多物理学家的兴趣，他们希望利

用孤立子理论来研究等离子体物理、基本粒子物理和凝聚态物理中某些难以解决的问题，以及物质非线性作用下的运动规律等．从数学方面来看，已经发现一大类非线性进化方程具有孤立子解，而且这些具有孤立子解的非线性进化方程具有一系列重要而共同的特征．它们具有无穷个守恒律；有化为线性方程求解的解析解法——散射反演法；存在 Bäcklund 变换；完全可积分等．对于这些重要特征的相互关系也作了一些研究．在数学方法上，也出现了许多独特的分支．借助于常微分方程边值问题和 Гельфанд-Марченко 积分方程的求解建立起来的散射反演法，经 Lax, Захаров, Шабат, AKNS 等已发展成为一种求解一类相当广泛的非线性进化方程的有用方法；借助于某些函数变换，Bäcklund 变换，Hirota 变换也找到了一大批孤立子解；借助于外微分形式方法和李群建立起来的延长结构法为求解非线性进化方程和深入研究散射反演法提供了一个强有力的工具．为了考察孤立子的稳定性和相互作用，一大批非线性进化方程的数值计算方法也随之应运而生并取得了很大的发展．可以毫不夸张地说，目前孤立子理论问题的研究已成为一门新兴的应用数学学科，它吸引着成千上万的数学工作者，因此这方面的研究必将大大地促进微分方程、泛函分析、群论、同伦理论和拓扑学等数学分支的发展．目前的孤立子理论研究工作已取得了重大的进展，特别是一维问题，现正在向更加深入、更加本质方向发展．目前的发展趋势，一是向多维方面发展，多维散射反演法，多维 Bäcklund 变换，多维孤立子，多维解析求解和数值计算等均已得到一些成果．二是正在向非线性耦合的进化方程组方向发展，例如，考察在等离子体物理中非完全可积分系统的孤立子．虽然这些方面的问题是比较难的，目前得到的成果也较少，但也正是大有可为的．

参 考 文 献

[1] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. Mclaughlin, *Proceedings of IEEE*, 61(1973), 1443.

[2] R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Solitons, Edited, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

[3] 张学铭,应用数学和计算数学,第三期,1979,50.

[4] 屠规彰,秦孟兆,数学的实践与认识,第三期,1980,46.

[5] 郭柏灵,力学与实践,第二期,1982,8—16.

[6] 庞小峰,光明日报,1981.5.8.

第二章　散射反演方法

第一节　引　　言

随着孤立子理论的形成和发展，散射反演法已成为孤立子和相当广泛的一大批非线性进化方程精确求解的一种极其重要的方法，它在孤立子理论中占有重要的地位．这种方法最主要的特点和优点是，对于这批相当复杂的非线性方程可通过组合若干个线性方程而精确地求解．近十多年来，这种方法已和随之发展起来的求孤立子解的其他方法，如 Bäcklund 变换、Hirota 方法、延长结构法等相互促进，并逐步完善．这种方法最早由 GGKM 在 KdV 方程中发现，后经 Lax, Захаров, Шабат, AKNS 等人把它推广到一大批很广泛的非线性进化方程(其中包括方程组和高维情况)中去，使它们成为线性精确求解的一种比较普遍的方法．最近，又把它和微分方程的定性理论联系起来，开展了很好的工作，为微分方程理论的研究开辟了一个新的途径．在这一章里，我们将介绍散射反演法的重要概念，它的最基本的内容以及一些最新研究成果，并提出一些尚待解决的问题．

第二节　KdV 方程和散射反演法

我们知道，对于 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0 \ (\alpha > 0) \tag{2.1}$$

用著名的 Hopf-Cole 变换，即令

$$u = -2\alpha \frac{w_x}{w} \tag{2.2}$$

可将它化为未知函数 w 的线性热传导方程

$$w_t = \alpha w_{xx} \tag{2.3}$$

且原来方程的解有表达式

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)}{t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\xi} u_0(\xi')d\xi'\right]d\xi \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\xi} u_0(\xi')d\xi'\right] d\xi \tag{2.4}$$

其中，$u_0(x)$ 为初始条件，$u|_{t=0} = u_0(x)$. 当 $\alpha \to 0$ 时，可证它趋于拟线性双曲型方程

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.5}$$

的广义解. 对于 KdV 方程是否有类似(2.2)的变换? 现考虑如下形式的 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.6}$$

令 $u = v^2 + v_x + \lambda$, 如果在此等式中把 $u(x, t)$ 看作已知函数，则它是未知函数 $v(x, t)$ 的 Riccati 方程，作变换 $v = \phi_x/\phi$，则可得到一维的 Schrödinger 方程

$$\phi_{xx} - (u - \lambda)\phi = 0 \tag{2.7}$$

其中，ϕ 为波函数，u 为位势，λ 对应于能谱. 我们注意到，这里的函数 u，不仅依赖于 x，而且还依赖于参数 t，因此，一般地说来，ϕ 和 λ 也依赖于参数 t. 我们知道，如果 KdV 方程的解是光滑的，有界的，且当 $|x| \to \infty$ 时趋于零，则在 Schrödinger 方程 (3.2) 中当 $\lambda < 0$ 时有有限个离散谱，$\lambda_m = -k_m^2 (m = 1, 2, \cdots, N)$; $\lambda > 0$ 为连续谱，$\lambda = k^2(-\infty < k < \infty$, k 为实的). 对于固定的 t，我们定义(2.7)散射问题

的解满足边界条件

$$
\begin{aligned}
\psi(x,k,t) &\sim e^{-ikx}+b(k,t)e^{ikx}, & x\to+\infty \\
\psi(x,k,t) &\sim a(k,t)e^{-ikx}, & x\to-\infty
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

并且它的有界态的解满足边界条件

$$
\begin{cases}
\psi_m(x,k_m(t),t)\sim c_m(k_m(t),t)e^{-k_m x}, & x\to+\infty \\
\psi_m(x,k_m(t),t)\sim e^{k_m x}, & x\to-\infty
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

其中，$b(k,t)$ 称为反射系数，$a(k,t)$ 为穿透系数，c_m 为衰减因子，且

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^2 dx=1,\ |a|^2+|b|^2=1 \tag{2.10}
$$

如图 2-1 所示。

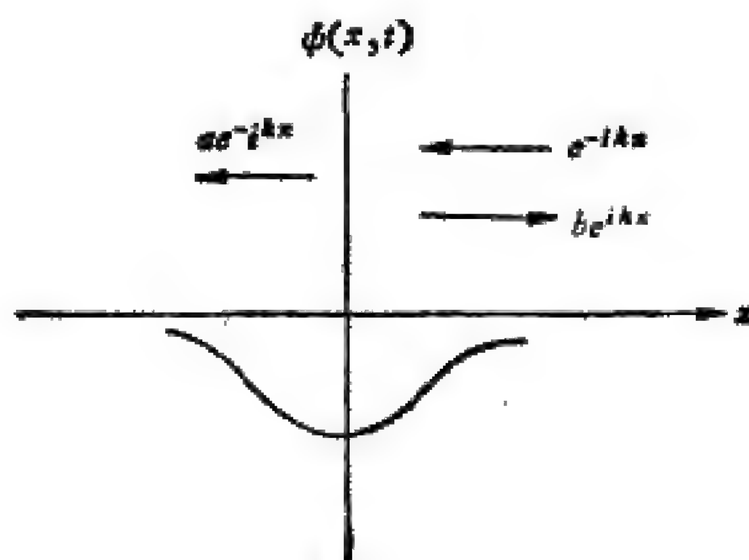


图 2-1

散射问题的"正"提法是：给定位势 u，寻求散射参量 k_m，c_m，$a(k)$，$b(k)$，并决定波函数 ψ。现提出反散射问题为：给定散射量 k_m，c_m，$b(k)$，决定位势 u。关于 Schrödinger 方程(2.7)中位势 u 和能谱 λ 以及散射量的联系，有如下的结果：

反散射问题的位势 u 为

$$
u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x,t) \tag{2.11}
$$

其中，K 满足如下的 ГЛМ 积分方程：

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty}B(y+z,t)\cdot K(x,z,t)dz=0, \tag{2.12}$$
$$y>x,\ K(x,z,t)\to 0,\ z\to\infty$$

积分方程(2.12)的核为

$$B(x,t)=\sum_{m=1}^{N}c_m^2(t)e^{-k_m x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,t)e^{ikx}dk \tag{2.13}$$

这里，求和表示对离散谱，积分表示对连续谱. 显然，上述指出的位势和散射量的联系并没有真正解决反散射问题的求解. 因为，为了决定位势 u，必须确定 K；为了决定 K，必须确定散射量 c_m，k_m，$b(k)$等，为了决定这些量，又取决于位势 u，这就造成了死循环. 为了打破这种死循环，真正从反散射问题求解位势 u（此 u 即是我们要求的 KdV 方程的解），下面揭示 KdV 方程和相应的 Schrödinger 方程相联系的一个很重要的事实. 我们有如下定理

定理 1 考虑 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx}-(u-\lambda)\psi=0,\ -\infty<x<+\infty \tag{2.7}$$

如果 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解，且当 $|x|\to\infty$ 时急剧趋于零，则(2.7)的离散特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 为常数（与 t 无关）.

证 由(2.7)解出 $u=\frac{\psi_{xx}}{\psi}+\lambda$，代入 KdV 方程(2.6)，并乘以 ψ^2 得

$$\lambda_t\psi^2+[\psi R_x-\psi_x R]_x=0 \tag{2.14}$$

其中

$$R\equiv\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x$$

当 $|x|\to\infty$ 时，对应于特征值 λ_n 的特征函数及其导数趋于零，将(2.14)积分得

$$\lambda_{nt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2dx=0$$

由规范化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2dx=1$，故有

$$\lambda_{nt}=0,\ 即\ \lambda_n=const$$

定理证毕。

λ_n 为常数，这个结果很重要，它意味着 Schrödinger 方程的反散射问题，只需从 KdV 方程的初始值 $u_0(x)$ 就可决定其离散特征值及一切散射量。利用 $\lambda_t=0$，(2.14) 变成

$$\psi R_{xx}-R\psi_{xx}=0,$$

即 $R_{xx}-(u-\lambda)R=0$。它的形式与(2.7)完全相同，因此 R 可用(2.7)的特征函数的线性组合表示，即

$$R\equiv\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x=C\psi+D\varphi \tag{2.15}$$

其中，C,D 依赖于 t，φ 为与 ψ 线性无关的方程(2.7)的解，如取 $\varphi=\psi\int_0^x\frac{dx}{\psi^2}$，我们有

定理 2 在定理 1 条件下，(2.7)散射问题的散射量

$$\begin{aligned}c_n(t)&=c_n(0)e^{4k_n^3t}\\ b(k,t)&=b(k,0)e^{8ik^3t}\\ a(k,t)&=a(k,0)\end{aligned}\tag{2.16}$$

其中，$c_n(0)$，$b(k,0)$，$a(k,0)$ 由 KdV 方程的初始值 $u_0(x)$ 所决定。

证 如ψ_n为特征函数，$\varphi_n=\psi_n\int_0^x\frac{dx}{\psi_n^2}$，则当 $x\to+\infty$ 时，φ_n 为指数无界，因此在(2.15)中 $D(t)=0$。将(2.15)乘以 ψ_n，并在无穷区间上积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\psi_n^2\right)_t dx+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_n\psi_{nxx}-\frac{3}{2}\psi_{nx}^2-3\lambda\psi_n^2\right)_x dx$$
$$=c\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2dx$$

由 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2dx=1$ 及边界条件可知，上式左端积分均为零，故 $c(t)=0$. 又因 $x\to+\infty$，$\psi\sim c_n(t)e^{-k_nx}$，故由 (2.15) 及 $u\to 0$ $(x\to+\infty)$，可得

$$c_n'(t)-4k_n^3c_n(t)=0$$

于是，$c_n(t)=c_n(0)e^{4k_n^3t}$.

其次，对于连续谱，可认为 λ 与 t 无关，于是 ψ 又满足 (2.15)，此时利用平面波的定常辐射条件，即

$$\psi\sim a(k,t)e^{-ikx},\quad x\to-\infty,$$

代入(2.15)可得

$$(a_t+ik^3a+3k^3a)e^{-ikx}=Ca(k,t)e^{-ikx}+\frac{D}{a}e^{-ikx}\int_0^x e^{2ikx}dx$$

$$a_t+4ik^3a=Ca+D/a\int_0^x e^{2ikx}dx$$

从而有 $D=0$，$a_t+(4ik^3-C)a=0$. 当 $x\to+\infty$ 时，把 $\psi\sim e^{-ikx}+b(k,t)e^{ikx}$ 代入 (2.15)，且由线性无关函数 $e^{\pm ikx}$ 的系数为零，得

$$C=4ik^3,\quad b_t-8ik^3b=0,\quad b(k,t)=b(k,0)e^{8ik^3t}.$$

由 $C=4ik^3$，有 $a_t=0$，即 $a(k,t)=a(k,0)$. 定理证毕.

定理 1，定理 2 为我们提供了由 Schrödinger 方程及散射问题求解 KdV 方程初值问题

$$\begin{cases}u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$

的具体途径. 首先，我们求解特征值问题

$$\psi_{xx}-[u_0(x)-\lambda]\psi=0 \tag{2.17}$$

对于它，散射量 k_n, $c_n(0)$, $b(k,0)$ 被确定，则由 (2.16) 得到 $c_n(t)$, $b(k,t)$，并决定了

$$
\begin{aligned}
B(x+y,t) &= \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)e^{-k_n(x+y)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)e^{ik(x+y)}dk \\
&= \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)e^{8k_n^3t-k_n(x+y)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,0)e^{i[8k^3t+k(x+y)]}dk
\end{aligned}
$$

再由 ГЛМ 方程

$$
\begin{aligned}
&K(x,y,t)+B(x+y,t) \\
&\quad +\int_x^{\infty} B(y+z,t)K(x,z,t)dz = 0 \ (y>x)
\end{aligned}
$$

决定 $K(x,y,t)$，于是我们得到了解

$$
u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t)
$$

其解法步骤如图 2-2 所示.

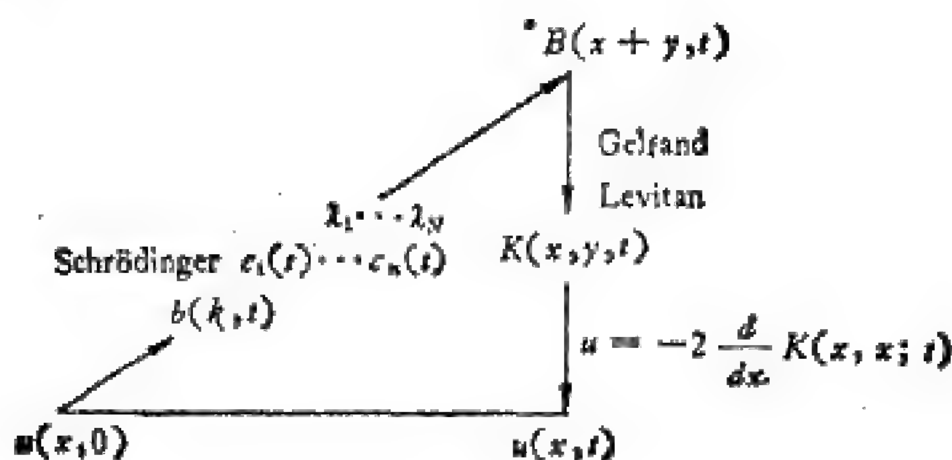


图 2-2

这样，我们就把一个求解非线性方程 (KdV 方程)的初值问题化为求解二个线性方程的问题，一个是二阶常微分方程的 Sturm-Liouville 问题，另一个是线性积分方程的求解. 下面我们举两个例子具体说明之.

设 $u_0(x)=-2\operatorname{sech}^2 x$，对应于(2.17)的特征值问题我们可以用超几何函数精确解出，它具有一个离散值 $k_1=1$，相应的规范化常数为 $c_1(0)=\sqrt{2}$，$b(k,0)=0$，因此 $b(k,t)\equiv 0,\forall t\geqslant 0$. 对应的 Гельфанд-Левитан 方程为

$$K(x,y,t)+2e^{8t-x-y}+2e^{8t-y}\int_x^\infty K(x,z,t)e^{-z}dz=0$$

设 $K(x,y,t)$ 为可分离变量[1]，$K(x,y,t)=L(x,t)e^{-y}$，代入上式得

$$L(x,t)+2e^{8t-x}+2e^{8t}L(x,t)\int_x^\infty e^{-2z}dz=0$$

$$L(x,t)=\frac{-2e^x}{1+e^{2x-8t}},\quad K(x,y,t)=\frac{-2e^{x-y}}{1+e^{8x-8t}}$$

容易验证，这样定出的 $K(x,y,t)$ 的确满足 Гельфанд-Левитан 方程，且是它的唯一解. 因此，KdV 方程的解为

$$u(x,t)=\frac{8e^{2x-8t}}{(1+e^{2x-8t})^2}=-2\operatorname{sech}^2(x-4t)$$

由行波解可知，它的确是 KdV 方程初值问题的精确解.

又如，取 $u(x,0)=u_0(x)=-6\operatorname{sech}^2 x$，此时可解出两个不同的特征值 $k_1=2$，$k_2=1$. 由 $b(k,0)=0$，可得 KdV 方程的解为

$$u(x,t)=-12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{[3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)]^2}$$

下面考虑用散射反演法求解 N 个孤立子的问题，此时反射系数 $b(k,t)\equiv 0$，仅是离散谱的情况. 此时 Гельфанд-Левитан 方程为

---

1) 对于非离散者，一般不能这样做，此时 $K(x,y,t)$ 应展成级数形式.

$$K(x,y,t)+\sum_{m=1}^{N} c_m^2(t)e^{-k_m(x+y)}$$

$$+\sum_{m=1}^{N} c_m^2 e^{-k_m y}\int_x^{\infty} e^{-k_m z}K(x,z,t)dz=0$$

(2.18)

其中，$c_m=c_m(t)=c_m(0)e^{4k_m^3 t}$，且 $k_m>0$ 是相异的．设 $K(x,y,t)$ 具有形式

$$K(x,y,t)=-\sum_{m=1}^{N} c_m\phi_m(x)e^{-k_m y} \tag{2.19}$$

其中，ϕ_m 为待定函数，c_m 为归一化因子． 将（2.19）代入(3.18)，令 $e^{k_m y}$ 的系数为 0，得到 $\phi_m(x)$ 应满足如下的线性代数方程

$$\phi_m(x)+\sum_{m=1}^{N} c_m c_n\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\phi_n(x)$$

$$=c_m e^{-k_m x}\ (m=1,2,\cdots,N) \tag{2.20}$$

如果采用矩阵表示，

$$I\equiv(\delta_{mn}),\ C\equiv\left(c_m c_n\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\right)$$

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)^T$$

$$E=(c_1e^{-k_1x},c_2e^{-k_2x},\cdots,c_Ne^{-k_Nx})^T$$

则(2.20)可写成

$$(I+C)\phi=E \tag{2.21}$$

为了使（2.20）的 ϕ 可解，我们能充分证明 C 是正定的．事实上，有

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} p_m p_n c_m c_n\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{(k_m+k_n)}$$

$$=\int_x^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{N} p_m c_m e^{-k_m z}\right]^2 dz>0$$

因此知 $I+C$ 是正定的，从而（2.20）有唯一解．我们可用 Cramer 法则解出 ϕ．设 Q_{mn} 为矩阵 $I+C$ 中的元素 a_{mn} 的代数余子式，依第 n 行展开得

$$\Delta \equiv \det(I+C)$$

$$=\sum_m \left(\delta_{mn}+c_m c_n \frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{(k_m+k_n)}\right) Q_{mn}$$

$$\phi_n(x)=\Delta^{-1}\sum_m c_m e^{-k_m x} Q_{mn}$$

由 (2.19)，$y=x$，有

$$K(x,y,t)=-\sum c_n\phi_n(x)e^{-k_n x}$$

$$=-\Delta^{-1}\sum_m\sum_n c_m c_n e^{-(k_m+k_n)x}Q_{mn}$$

$$=\Delta^{-1}\frac{d}{dx}\Delta$$

于是无反射系数的位势为

$$u(x,t)=-2\frac{d^2}{dx^2}\log\det(I+C) \qquad (2.22)$$

它就是 KdV 方程的解．

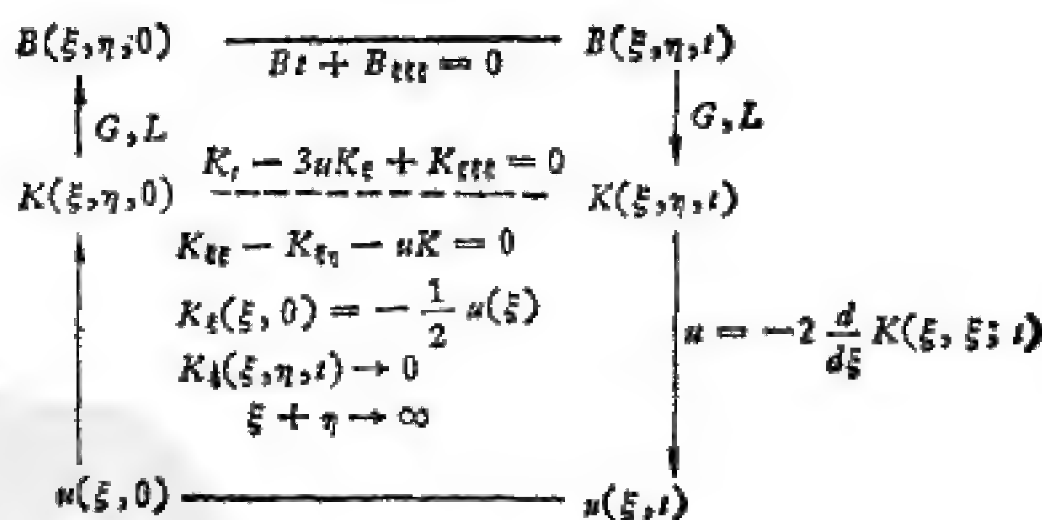


图 2-3

在 Гельфанд-Левитан 积分方程中，由于K和B的某种对称地位，也可不采用先求散射量决定B，然后再求K的办法，而由满足线性双曲型方程的解K利用 Гельфана-Левитан 方程求解B，这样形成了散射反演问题的另一种解法，其求解框图如图 2-3 所示.

第三节 Lax 算子和 Захаров, Шабат, AKNS 的推广

考虑一般非线性进化方程

$$u_t = K(u) \tag{3.1}$$

其中，$K(u)$表示在某个适当函数空间上的非线性算子. 如果我们能找到线性算子L和B，它们依赖于方程(3.1)的解u，满足算子方程(通称为 Lax 算子方程)

$$iL_t = BL - LB = [B, L] \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{3.2}$$

其中，B为自伴算子，从(3.2)可推出对应于算子L的特征值E的特征函数ϕ，即

$$L\phi = E\phi \tag{3.3}$$

若ϕ随时间的变化满足方程

$$i\phi_t = B\phi \tag{3.4}$$

则E不随时间改变. 事实上，将(3.3)对t微分并乘以i得

$$\begin{aligned} i\left[\phi\frac{dE}{dt} + E\frac{d\phi}{dt}\right] &= i\left[L\phi_t + \frac{\partial L}{\partial t}\phi\right] \\ &= iL\phi_t + [BL - LB]\phi \\ &= L(i\phi_t - B\phi) + EB\phi \end{aligned}$$

由(3.4)，$i\phi_t = B\phi \Rightarrow i\phi\dfrac{dE}{dt} = 0$.

求解给定方程(3.1)的初值问题，即给定$u(x, 0)$，求满足

(3.1)的解 $u(x,t)$，一般可通过以下几个步骤：

(i) 求直接问题的解．即从 $t=0$ 的已知值 $u(x,0)$ 计算 ϕ 在 $|x|=\infty$ 处的散射参量（诸如算子 L 的特征值、反射、穿透系数等）．

(ii) 求散射资料随时间的变化． 由 (3.4)，考虑 B 在 $|x|=\infty$ 的渐近形式，计算散射资料随时间的变化．

(iii) 求反问题的解． 从已知的 L 的散射资料作为时间的函数，构造解 $u(x,t)$．

一般非线性进化方程的求解步骤简单示于图 2-4．

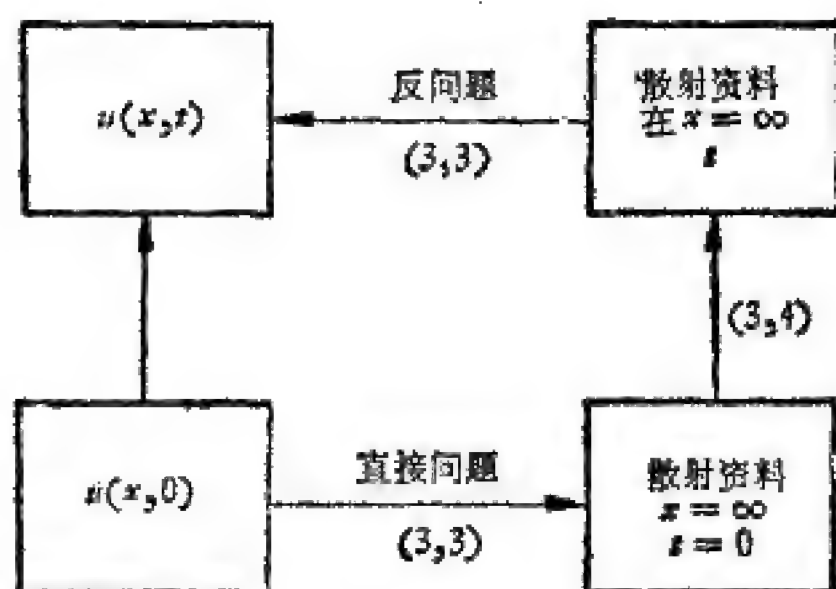


图 2-4

例 考虑 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.5}$$

具初始条件

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3.6}$$

的求解．可取二阶微分算子族 $L(t)$：

$$L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{3.7}$$

其中，t 为参数，$u(x,t)$ 为(3.5)的解，$u(\cdot,t)\in L_2$．

算子 L 的特征值问题为

$$v \equiv \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$q(x, t)$, $r(x, t)$ 均为任意的可微函数，ζ 为常数。设 B 具有一般形式

$$B = \begin{pmatrix} a(x, t; \zeta) & b(x, t; \zeta) \\ c(x, t; \zeta) & -a(x, t; \zeta) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

其中，系数 (a, b, c) 也是任意的。(最初 Захаров 和 Шабат 考虑 $r = -q^*$ 的情况)。$i\phi_t = B\phi$ 取形式

$$i\frac{dv}{dt} = Bv \tag{3.13}$$

现把(3.10)写成标量形式

$$\begin{cases} iv_{1x} - iqv_2 = \zeta v_1 \\ irv_1 - iv_{2x} = \zeta v_2 \end{cases} \tag{3.14}$$

(3.13) 也写成标量形式

$$\begin{cases} iv_{1t} = av_1 + bv_2 \\ iv_{2t} = cv_1 - av_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

将(3.14)对 t 微分得

$$\begin{cases} iv_{1xt} - iq_tv_2 - iqv_{2t} = \zeta v_{1t} \\ ir_tv_1 + irv_{1t} - iv_{2xt} = \zeta v_{2t} \end{cases} \tag{3.16}$$

将(3.15)对 x 微分得

$$\begin{cases} iv_{1xt} = a_xv_1 + av_{1x} + b_xv_2 + bv_{2x} \\ iv_{2xt} = c_xv_1 + cv_{1x} - a_xv_2 - av_{2x} \end{cases} \tag{3.17}$$

从 (3.16), (3.17) 中消去 v_{1xt}, v_{2xt} 可得

$$\begin{cases} a_xv_1 + av_{1x} + b_xv_2 + bv_{2x} = \zeta v_{1t} + iq_tv_2 + iqv_{2t} \\ c_xv_1 + cv_{1x} - a_xv_2 - av_{2x} = ir_tv_1 + irv_{1t} - \zeta v_{2t} \end{cases} \tag{3.18}$$

再将(3.14),(3.15)代入(3.18)，并消去 v_{1x}, v_{2x}, v_{1t}, v_{2t} 得

$$\begin{aligned} a_xv_1 + a(-i\zeta v_1 + qv_2) + b_xv_2 + b(i\zeta v_2 + rv_1) \\ = -\zeta i(av_1 + bv_2) + iq_tv_2 + q(cv_1 - av_2) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$q(x, t)$, $r(x, t)$ 均为任意的可微函数，ζ 为常数. 设 B 具有一般形式

$$B = \begin{pmatrix} a(x, t; \zeta) & b(x, t; \zeta) \\ c(x, t; \zeta) & -a(x, t; \zeta) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

其中，系数 (a, b, c) 也是任意的. (最初 Захаров 和 Шабат 考虑 $r = -q^*$ 的情况). $i\phi_t = B\phi$ 取形式

$$i\frac{dv}{dt} = Bv \tag{3.13}$$

现把(3.10)写成标量形式

$$\begin{cases} iv_{1x} - iqv_2 = \zeta v_1 \\ irv_1 - iv_{2x} = \zeta v_2 \end{cases} \tag{3.14}$$

(3.13) 也写成标量形式

$$\begin{cases} iv_{1t} = av_1 + bv_2 \\ iv_{2t} = cv_1 - av_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

将(3.14)对 t 微分得

$$\begin{cases} iv_{1xt} - iq_tv_2 - iqv_{2t} = \zeta v_{1t} \\ ir_tv_1 + irv_{1t} - iv_{2xt} = \zeta v_{2t} \end{cases} \tag{3.16}$$

将(3.15)对 x 微分得

$$\begin{cases} iv_{1xt} = a_xv_1 + av_{1x} + b_xv_2 + bv_{2x} \\ iv_{2xt} = c_xv_1 + cv_{1x} - a_xv_2 - av_{2x} \end{cases} \tag{3.17}$$

从 (3.16), (3.17) 中消去 v_{1xt}, v_{2xt} 可得

$$\begin{cases} a_xv_1 + av_{1x} + b_xv_2 + bv_{2x} = \zeta v_{1t} + iq_tv_2 + iqv_{2t} \\ c_xv_1 + cv_{1x} - a_xv_2 - av_{2x} = ir_tv_1 + irv_{1t} - \zeta v_{2t} \end{cases} \tag{3.18}$$

再将(3.14),(3.15)代入(3.18),并消去 v_{1x}, v_{2x}, v_{1t}, v_{2t} 得

$$a_xv_1 + a(-i\zeta v_1 + qv_2) + b_xv_2 + b(i\zeta v_2 + rv_1)$$
$$= -\zeta i(av_1 + bv_2) + iq_tv_2 + q(cv_1 - av_2) \tag{3.19}$$

$$c_x v_1 + c(-i\zeta v_1 + q v_2) - a_x v_2 - a(i\zeta v_2 + r v_1)$$
$$= i r_t v_1 + r(a v_1 + b v_2) + i\zeta(c v_1 - a v_2) \qquad (3.20)$$

对于方程(3.19)比较 v_1, v_2 的系数得

$$v_1: a_x + br = qc, \quad \therefore \ a_x = qc - br$$
$$v_2: b_x + 2i\zeta b = iq_t - 2aq$$

比较方程(3.20)中 v_1, v_2 的系数得

$$v_1: c_x - 2i\zeta c = ir_t + 2ar$$
$$v_2: cq - a_x = br$$

于是，我们得到任意系数 (a, b, c, r, q) 应满足的方程组

$$\frac{\partial a}{\partial x} = qc - rb \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + 2i\zeta b = i\frac{\partial q}{\partial t} - 2aq \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial c}{\partial L} - 2i\zeta c = i\frac{\partial r}{\partial t} + 2ar \qquad (3.23)$$

以后为了书写统一起见，令

$$\frac{dv}{dt} = Mv, \ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$$

可改写方程组 (3.21), (3.22), (3.23) 为

$$A_x = qC - rB \qquad (3.24)$$
$$B_x + 2i\zeta B = q_t - 2Aq \qquad (3.25)$$
$$C_x - 2i\zeta C = r_t + 2Ar \qquad (3.26)$$

其中，$A \equiv A(x, t; \zeta)$, $B \equiv B(x, t; \zeta)$, $C \equiv C(x, t; \zeta)$, $r = r(x, t)$, $q = q(x, t)$.

方程组(3.14),(3.15) 和 (3.24)—(3.26)成为散射反演法分析的基础. 对于给定的初始值 $r(x, 0)$, $q(x, 0)$, 方程组 (3.14) 用来寻求离散特征值(它不随时间改变)和初始时刻的特征函数 $v_1(x, 0; \zeta)$, $v_2(x, 0; \zeta)$ 在 $|x| \to \infty$ 时确定的

散射资料. 如果给出一组 r_t, q_t, r, q 原则上能求出方程组(3.24)—(3.26)的解 A, B, C, 有了 A, B, C, 我们能从方程组(3.15)计算出特征函数 v_1, v_2 的渐近形态 ($|x| \to \infty$) 随时间的变化, 再求出下一时刻的位势 $r(x,t)$, $q(x,t)$. 当然,由于 r, q 是未知待求的, 所以我们还不能如此简单地构造, 不过,它已给了我们信息,即对于进化方程如何用散射反演法去构造它的精确解.

首先,我们寻求(3.24)—(3.26)某些很简单的解. 虽然它是很特殊的, 但由它可得到很广泛的一类非线性进化方程. 如令

$$A = \sum_{n=0}^{N} A^{(n)}\zeta^n, \quad B = \sum_{n=0}^{N} B^{(n)}\zeta^n, \quad C = \sum_{n=0}^{N} C^{(n)}\zeta^n \tag{3.27}$$

不难求得, $A^{(N)} = a_N$ (a_N 与 x 无关, 能依赖于 t), $B^{(N)} = C^{(N)} = 0$. 我们先从(3.24)求出 $A^{(N-1)}$, 再从(3.25),(3.26)求出 $B^{(N-1)}$, $C^{(N-1)}$. 重复这个过程,直到求出所有的系数 $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, 特别 ζ^0 的最后两个方程为

$$\begin{cases} q_t = 2A^{(0)}q + B_x^{(0)}, \\ r_t = -2A^{(0)}r + C_x^{(0)}. \end{cases} \tag{3.28}$$

现举例具体说明之. 令 $N = 3$, 设

$$A = A^{(0)} + A^{(1)}\zeta + A^{(2)}\zeta^2 + a_3\zeta^3 \quad (a_3 \text{ 与 } x \text{ 无关})$$

$$B = B^{(0)} + B^{(1)}\zeta + B^{(2)}\zeta^2$$

$$C = C^{(0)} + C^{(1)}\zeta + C^{(2)}\zeta^2$$

代入(3.24)—(3.26)可得

$$A_x^{(0)} = qC^{(0)} - rB^{(0)}$$

$$A_x^{(1)} = qC^{(1)} - rB^{(1)}$$

$$A_x^{(2)} = qC^{(2)} - rB^{(2)}$$

$$B_x^{(1)} + 2iB^{(0)} = -2A^{(1)}q$$

$$B_x^{(2)} + 2iB^{(1)} = -2A^{(2)}q$$

$$C_x^{(1)} - 2iC^{(0)} = 2A^{(1)}r$$
$$C_x^{(2)} - 2iC^{(1)} = 2A^{(2)}r$$

于是,可得

$$A^{(2)} = a_2, \quad B^{(2)} = ia_3q, \quad C^{(2)} = ia_3r$$

由 $A^{(2)}r$, $C_x^{(2)}$, 可求出 $C^{(1)}$:

$$C^{(1)} = \frac{1}{2}a_3r_x + ia_2r$$

由 $A^{(2)}q$, $B_x^{(2)}$, 可求出 $B^{(1)}$:

$$B^{(1)} = ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x$$

再由 $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, 求出 $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = -\frac{1}{2}a_3qr + a_1$$

再从 $A^{(1)}q$, $B_x^{(1)} \to B^{(0)}$; $A^{(1)}r$, $C^{(1)} \to C^{(0)}$; $B^{(0)}$, $C^{(0)} \to A^{(0)}$. 于是,可得到 A, B, C 的表达式为

$$\begin{cases} A = a_3\zeta^3 + a_2\zeta^2 + \left(\frac{1}{2}a_3qr + a_1\right)\zeta \\ \qquad + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{i}{4}a_3(qr_x - q_xr) + a_0 \\ B = ia_3q\zeta^2 + \left(ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x\right)\zeta + ia_1q \\ \qquad + \frac{i}{2}a_3q^2r - \frac{1}{2}a_2q_x - \frac{i}{4}a_3q_{xx} \\ C = ia_3r\zeta^2 + \left(ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x\right)\zeta + ia_1r \\ \qquad + \frac{i}{2}a_3qr^2 + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{i}{4}a_3r_{xx} \end{cases} \tag{3.29}$$

相对应的进化方程(3.28)为

$$0 = q_t + \frac{i}{4}a_3(q_{xxx} - 6qrq_x)$$

$$+\frac{1}{2}a_2(q_{xx}-2q^2r)-ia_1q_x-2a_0q$$

$$0=r_t+\frac{i}{4}a_3(r_{xxx}-6qrr_x)$$

$$-\frac{1}{2}a_2(r_{xx}-2qr^2)-ia_1r_x+2a_0r$$

考虑几种特殊情况

(i) $a_0=a_1=a_2=0$, $a_3=-4i$

(a) $r=-1$, KdV 方程

$$q_t+6qq_x+q_{xxx}=0 \tag{3.30}$$

(b) $r=\mp q$, MKdV 方程

$$q_t\pm 6q^2q_x+q_{xxx}=0 \tag{3.31}$$

(ii) $a_0=a_1=a_3=0$, $a_2=-2i$, $r=\mp q^*$, 非线性 Schrödinger 方程

$$q_t-iq_{xx}\mp 2iq^2q^*=0 \tag{3.32}$$

对于 KdV 方程(3.30),散射问题(3.14),可归结为 Schrödinger 方程

$$v_{2xx}+(\zeta^2+q(x,t))v_2=0 \tag{3.33}$$

我们知道,对于实的 $q(x,t)$, ζ^2 是实的,其离散特征值位于虚轴上,它对应于稳定的孤立子. 一般来说,离散特征值为复的.

同样,我们能寻求 A,B,C 为 ζ 的负次幂的方程,例如取

$$A(x,t;\zeta)=\frac{a(x,t)}{\zeta},$$

$$B(x,t;\zeta)=\frac{b(x,t)}{\zeta},$$

$$C(x,t;\zeta)=\frac{c(x,t)}{\zeta}$$

可得

$$a_x = \frac{i}{2}(qr)_t,\ q_{xt} = -4iaq,\ r_{xt} = -4iar \quad (3.34)$$

特殊的且重要的情况为

(i) $a = \frac{i}{4}\cos u,\ b = c = \frac{i}{4}\sin u,\ r = -q = \frac{1}{2}u_x$

Sine-Gordon 方程

$$u_{xt} = \sin u \quad (3.35)$$

(ii) $a = \frac{i}{4}\cosh u,\ -b = c = \frac{i}{4}\sinh u,\ r = q = \frac{1}{2}u_x$

Sinh-Gordon 方程

$$u_{xt} = \sinh u \quad (3.36)$$

第四节　更一般的进化方程（AKNS 方程）

在上一节的讨论中，必然会有人提出这样的问题，用散射反演法求解的进化方程是否仅限于 A, B, C 关于 ζ 的有限展开形式？这一节我们将指出比它更广泛的一类进化方程（可用散射反演法求解）的确存在。

设　A, B, C 满足边界条件

$$\begin{cases} A(x,t;\zeta) \to A_0(\zeta) \\ B(x,t;\zeta) \to 0, \\ C(x,t;\zeta) \to 0, \end{cases} \quad |x| \to \infty \quad (4.1)$$

对于 A, B, C 当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时分别取不同值的情况，可类似考虑。

为了得到必要的积分条件，我们形式地解方程组(3.24)—(3.26)，这种解容易由(3.14)的特解给出。为此，我们先研究(3.14)特征值问题的基本解。

设 $q(x,t)$, $r(x,t)\to 0(|x|\to\infty)$, 对于实的 ζ 值,定义(3.14)的线性无关解,具有如下的渐近值

$$\begin{cases} \varphi \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, & x \to -\infty \\ \bar{\varphi} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, & x \to -\infty \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \phi \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, & x \to +\infty \\ \bar{\phi} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, & x \to +\infty \end{cases} \tag{4.3}$$

设散射资料 $a(\zeta,t)$, $b(\zeta,t)$, $\bar{a}(\zeta,t)$, $\bar{b}(\zeta,t)$ 为两个线性无关解的系数,即有

$$\varphi = a\bar{\phi} + b\phi \to \begin{pmatrix} a e^{-i\zeta x} \\ b e^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad x \to +\infty \tag{4.4}$$

$$\bar{\varphi} = \bar{b}\bar{\phi} - \bar{a}\phi \to \begin{pmatrix} \bar{b} e^{-i\zeta x} \\ -\bar{a} e^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad x \to +\infty \tag{4.5}$$

因此,系数 $a(\zeta,t)$, $b(\zeta,t)$, $\bar{a}(\zeta,t)$, $\bar{b}(\zeta,t)$ 可由 φ, $\bar{\varphi}$, ϕ, $\bar{\phi}$ 的 Wronski 行列式求解,即有

$$\begin{cases} a = w(\varphi,\phi)/w(\bar{\phi},\phi) = w(\varphi,\phi) \\ b = -w(\varphi,\bar{\phi}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{a} = w(\bar{\varphi},\bar{\phi}) \\ \bar{b} = w(\bar{\varphi},\phi) \end{cases} \tag{4.6}$$

其中, $w(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$, $w(\bar{\phi},\phi) = 1$, 因 $w(\varphi,\bar{\varphi}) = -1$, 故有

$$\begin{aligned} a\bar{a} + b\bar{b} &= w(\bar{\varphi},\phi)w(\bar{\varphi},\bar{\phi}) - w(\varphi,\bar{\phi})w(\bar{\varphi},\phi) \\ &= (\varphi_1\phi_2 - \varphi_2\phi_1)(\bar{\varphi}_1\bar{\phi}_2 - \bar{\varphi}_2\bar{\phi}_1) \\ &\quad - (\varphi_1\bar{\phi}_2 - \varphi_2\bar{\phi}_1)(\bar{\varphi}_1\phi_2 - \bar{\varphi}_2\phi_1) \\ &= -\varphi_1\bar{\varphi}_2(\phi_1\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1\phi_2) + \bar{\varphi}_1\varphi_2(\bar{\phi}_1\phi_2 - \phi_1\bar{\phi}_2) \end{aligned}$$

$$= \bar{\varphi}_1\varphi_2 - \varphi_1\bar{\varphi}_2 = 1$$

我们在第五节将证明 $a(\zeta,t)$ 能解析延拓到上半平面，$\mathrm{Im}\zeta > 0$；$\bar{a}(\zeta,t)$，能解析延拓到下半平面，$\mathrm{Im}\zeta < 0$，且(3.14)的离散特征值 $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ 在上半平面 ($\mathrm{Im}\zeta > 0$) 为 $a(\zeta,t)$ 的零点，$\varphi(\zeta_k,t) = b_k(t)\phi(\zeta_k,t)$. 类似的有，$\bar{a}(\zeta,t)$ 的零点在下半平面，$\mathrm{Im}\zeta < 0$，也是特征值，且在零点上，

$$\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_k,t) = \bar{b}_k(t)\bar{\phi}_k(\bar{\zeta}_k,t).$$

由于选取(4.2)使之规范化，且设(3.24)—(3.26)中的 $B, C \to 0$ $(x \to -\infty)$，从(3.24)可看到 $A(x,t;\zeta) \to \mathrm{const}$ $(x \to -\infty)$，令

$$\lim_{x\to-\infty} A(x,t;\zeta) = A_-(\zeta) \tag{4.7}$$

其中，$A_-(\zeta)$ 为 ζ 的任意函数. 因 $\varphi e^{A_- t}$，$\varphi e^{-A_- t}$ 满足方程(3.24)，有

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} A - A_- & B \\ C & -A - A_- \end{pmatrix}\varphi \tag{4.8}$$

$$\bar{\varphi}_t = \begin{pmatrix} A + A_- & B \\ C & -A + A_- \end{pmatrix}\bar{\varphi} \tag{4.9}$$

取 $x \to +\infty$ 的渐近值，得

$$\begin{pmatrix} a_t e^{-i\zeta x} \\ b_t e^{i\zeta x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ - A_- & \lim\limits_{x\to+\infty} B \\ \lim\limits_{x\to+\infty} C & -A_+ - A_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a e^{-i\zeta x} \\ b e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases} a_t = (A_+ - A_-)a + B_+ b \\ b_t = C_+ a - (A_+ + A_-)b \end{cases} \tag{4.10}$$

同理有

$$\begin{cases} \bar{a}_t = -(A_+ - A_-)\bar{a} - C_+\bar{b} \\ \bar{b}_t = -B_+ a + (A_+ + A_-)\bar{b} \end{cases} \tag{4.11}$$

其中，$A_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} A$，$B_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} B e^{2i\zeta x}$，$C_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} C e^{-2i\zeta x}$. 如

果考虑特殊情况，$A_+ = A_-$，$B_+ = C_+ = 0$，则由 (4.10)，(4.11) 可解得

$$
\begin{cases}
a(\zeta, t) = a(\zeta, 0) \\
b(\zeta, t) = b(\zeta, 0)e^{-2A_-(\zeta)t} \\
\bar{a}(\zeta, t) = \bar{a}(\zeta, 0) \\
\bar{b}(\zeta, t) = \bar{b}(\zeta, 0)e^{2A_-(\zeta)t}
\end{cases} \tag{4.12}
$$

现考虑一般情况．设 $I(u, v)$ 表示双线性形式

$$
I(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} (-q_t u_2 v_2 + r_t u_1 v_1) dx \tag{4.13}
$$

则由基本解矩阵，A_+，B_+，C_+ 能表为

$$
\begin{cases}
A_+ = -I(\psi, \bar{\psi}) + A_-(a\bar{a} - b\bar{b}) \\
B_+ = -I(\psi, \psi) + 2a\bar{b}A_- \\
C_+ = I(\psi, \bar{\psi}) + 2\bar{a}bA_-
\end{cases} \tag{4.14}
$$

从 (4.4)，(4.5) 可得逆关系

$$
\begin{cases}
\psi = -a\varphi + \bar{b}\bar{\varphi} \\
\psi = b\bar{\varphi} + \bar{a}\varphi
\end{cases} \tag{4.15}
$$

将(4.15)代入(4.14)后，再将 A_{+1}，B_+，C_+ 代入 (4.10)，(4.11) 可得

$$
\begin{cases}
a_t = -I(\varphi, \psi) \\
b_t = I(\varphi, \psi)
\end{cases} \tag{4.16}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{a}_t = -I(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \\
\bar{b}_t = -I(\bar{\varphi}, \psi)
\end{cases} \tag{4.17}
$$

于是，可得到散射资料随时间的发展变化，由(4.16)可得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{b}{a}\right)_t = \frac{b_t a - a_t b}{a^2} &= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{ab}[b_t a - a_t b] \\
&= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{ab}[I(\varphi, b\bar{\varphi} + \bar{a}\varphi)a \\
&\quad - I(\varphi, -a\varphi + \bar{b}\bar{\varphi})b]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{b}{a}\frac{I(\varphi,\varphi)}{ab}$$

同理可得

$$\begin{cases}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)_t = \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)\frac{I(\bar{\varphi},\varphi)}{\bar{a}\bar{b}} \\ \left(\frac{\bar{b}}{a}\right)_t = \left(\frac{\bar{b}}{a}\right)\frac{I(\phi,\phi)}{ab} \\ \left(\frac{b}{\bar{a}}\right)_t = \left(\frac{b}{\bar{a}}\right)\frac{I(\bar{\phi},\phi)}{ab}\end{cases} \tag{4.18}$$

注意，这里关于函数 $q(x,t)$，$r(x,t)$ 没有太多的假定只需要保证积分 $I(u,v)$ 存在这样弱的条件就行．原则上，对任何 q_t，r_t，我们能从(4.18)计算散射资料随时间的发展，以保证散射反演法下一时刻 $q(x,t)$，$r(x,t)$ 的需要．

以下寻求一般进化方程的解析表示．对于任意的复变函数 $\Omega(\zeta)$，$\bar{\Omega}(\zeta)$，如选取

$$I(\phi,\phi) = 2\Omega(\zeta)a\bar{b} \tag{4.19}$$

$$I(\bar{\phi},\bar{\phi}) = -2\bar{\Omega}(\zeta)\bar{a}b \tag{4.20}$$

则我们能线性求解方程(4.18)．(4.19)能写成如下形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(r_t + 2\Omega(\zeta)r)\phi_1^2 + (-q_t + 2\Omega(\zeta)q)\phi_2^2]dx = 0 \tag{4.21}$$

事实上，我们注意到

$$I(\phi,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty}(-q_t\phi_2^2 + r_t\phi_1^2)dx$$

$$-\phi_1\phi_2\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\phi_1\phi_2\Big|_{-\infty}$$

$$= (-a\varphi_1 + \bar{b}\bar{\varphi}_1)(-a\varphi_2 + \bar{b}\bar{\varphi}_2)\Big|_{-\infty}$$

$$= a\bar{b}$$

另一方面，利用(3.14)可得

$$-\psi_1\psi_2\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(\psi_1\psi_2)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(q\psi_2^2 + r\psi_1^2)dx$$

由此即得(4.21)。利用以上关系式及(3.14),可验证向量

$$\Psi = (\psi_1^2, \psi_2^2)^T$$

满足方程

$$L\Psi = \zeta\Psi \tag{4.22}$$

其中,向量 $(\psi_1^2, \psi_2^2)^T$ 表示向量 (ψ_1^2, ψ_2^2) 的转置,

$$L = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial x} - 2q\displaystyle\int_x^{\infty}\cdot r(y)dy & -2q\displaystyle\int_x^{\infty}\cdot q(y)dy \\ 2r\displaystyle\int_x^{\infty}\cdot r(y)dy & \dfrac{\partial}{\partial x} + 2r\displaystyle\int_x^{\infty}\cdot q(y)dy \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

如我们定义 $u = (r, q)^T$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,则(4.21)可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma_3 u_t + 2u\Omega(\zeta)]\Psi dx = 0 \tag{4.24}$$

如果 $\Omega(\zeta)$ 为 ζ 的整函数,则由 $L\Psi = \zeta\Psi$,有

$$\Omega(\zeta)\Psi = \Omega(L)\Psi \tag{4.25}$$

定义共轭算子 L^+

$$L^+ = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} - 2r\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\cdot q(y)dy & 2r\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\cdot r(y)dy \\ -2q\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\cdot q(y)dy & -\dfrac{\partial}{\partial x} + 2q\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\cdot r(y)dy \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

则(4.24)可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma_3 u_t + 2\Omega(L^+)u]\Psi dx = 0 \tag{4.27}$$

同理(4.20)可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma_3 u_t + 2\Omega(L^+)u]\bar{\Psi} dx = 0, \bar{\Psi} = (\bar{\phi}_1^2, \bar{\phi}_2^2)^T \tag{4.28}$$

当取 $\Omega = \bar{\Omega}$ 时，为了同时满足(4.27)，(4.28)，要求

$$\sigma_3 u_t + 2\Omega(L^+)u = 0 \tag{4.29}$$

无损于一般性．若选取 $\Omega(\zeta) = A_-(\zeta)$，则得

$$\sigma_3 u_t + 2A_-(L^+)u = 0 \tag{4.30}$$

(4.30)就是我们要求的更一般的非线性进化方程组，它的线性色散关系为 $A_-(\zeta)$，可以用散射反演法来求解．例如，

$$\Omega(\zeta) = A_-(\zeta) = -2i\zeta^2 \tag{4.31}$$

$$\sigma_3 u_t = \begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix},\ L^+u = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} r_x \\ q_x \end{pmatrix},$$

$$2[-2i(L^+)^2 u] = i\begin{pmatrix} r_{xx} - 2qr^2 \\ q_{xx} - 2q^2 r \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} r_{xx} - 2qr^2 \\ q_{xx} - 2q^2 r \end{pmatrix} = 0 \tag{4.32}$$

当 $r = \mp q^*$ 时，它为(3.32)．

同样有

$$I(\phi, \phi) = -2A_-(\zeta)b\bar{b} \tag{4.33}$$

$$I(\varphi, \varphi) = -2A_-(\zeta)ab \tag{4.34}$$

$$I(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = 2A_-(\zeta)\bar{a}\bar{b} \tag{4.35}$$

从(4.14)推出

$$A_+ = A_-,\ B_+ = C_+ = 0 \tag{4.36}$$

因此，反散射问题可根据散射资料求解．我们在守恒律的论述中，将证明(4.36)导致积分密度 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的存在，它们是运动常数，其中

$$c_1 = \int qrd_x,\ c_2 = \frac{1}{2}\int (rq_x - r_x q)dx,$$

$$c_3 = \int (q_x r_x + q^2 r^2)dx \tag{4.37}$$

我们注意到当 $q \to 0(|x| \to \infty)$ 时，$r = -1$，(3.14) 等价于 Schrödinger 方程特征值问题

$$v_{2xx} + (\zeta^2 + q)v_2 = 0 \tag{4.38}$$

此时进化方程为

$$q_t + \hat{c}(4L_1^+)q_x = 0 \tag{4.39}$$

其中，算子

$$L_1^+ = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q + \frac{1}{2}q_x\int_x^\infty \cdot dy \tag{4.40}$$

$\hat{c}(k^2) = \omega/k$，ω 为其线性方程的色散关系，容易验证当 $\omega = -k^3$ 时有

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0 \tag{4.41}$$

我们还能推广色散关系 $\Omega(\zeta)$ 为整函数之商，如 $\Omega(\zeta) = \Omega_1(\zeta)/\Omega_2(\zeta)$，$\Omega_1(\zeta)$，$\Omega_2(\zeta)$ 为整函数，于是类似于(4.30)有

$$\Omega_2(L^+)\sigma_3 u_t + 2\Omega_1(L^+)u = 0 \tag{4.42}$$

如取 $\Omega = i\alpha/2(\zeta - \zeta_1)$，则(4.42)为

$$\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} r_{xt} - 2r\int_{-\infty}^{x}(qr)_t dy - 2i\zeta_1 r_t \\ q_{xt} - 2q\int_{-\infty}^{x}(qr)_t dy + 2i\zeta_1 q_t \end{pmatrix} = -i\alpha\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

对于(4.39)，当 $\hat{c}(k^2) = \frac{1}{1 + k^2}$ 时，有

$$q_t - q_{xxt} - 4qq_t + 2q_x\int_x^\infty q_t dy + q_x = 0 \tag{4.44}$$

它在长波近似、小振幅假定下可归结为 KdV 方程，并具有 PBBM 方程描述的性质。

当然，进一步分析更广泛一类的进化方程是可能的，例如我们不选取 $\Omega(\zeta) = \Omega(\zeta)$，反散射变法仍能用，甚至适用于那些没有运动常数的情况。

第五节　AKNS 方程反散射问题的求解

这一节我们主要讨论反散射问题的求解，对于非自共轭的特征值问题，仍可得到 Марченко 积分方程；我们先分析一下散射资料的解析性质。

1）散射资料的解析性质

对于(3.14)在无穷区间 $-\infty < x < \infty$ 上给定的特征值问题，设当 $|x| \to \infty$ 时 r，q 充分急剧地趋于零。且 φ，$\bar{\varphi}$，ϕ，$\bar{\phi}$ 为分别满足边界条件 (4.2)，(4.3) 和方程组 (3.14) 的解 (Jost 函数)，φ，$\bar{\varphi}$ 为线性无关，ϕ和 $\bar{\phi}$ 亦然。对于实数 ζ 有

$$\varphi(\zeta, x) = a(\zeta)\bar{\phi}(\zeta, x) + b(\zeta)\phi(\zeta, x) \tag{5.1}$$

$$\bar{\varphi}(\zeta, x) = -\bar{a}(\zeta)\phi(\zeta, x) + \bar{b}(\zeta)\bar{\phi}(\zeta, x) \tag{5.2}$$

由此确定 a，$\bar{a}$，b，$\bar{b}$。由(3.14)可知，如 $u(\zeta, x)$ 和 $v(\zeta, x)$ 为(3.14)的解，则有

$$\frac{d}{dx} w(u, v) = 0 \tag{5.3}$$

其中

$$w(u, v) \equiv u_1(\zeta, x)v_2(\zeta, x) - u_2(\zeta, x)v_1(\zeta, x) \tag{5.4}$$

事实上，

$$\begin{aligned} &[u_{1x} + i\zeta u_1 = qu_2] \cdot v_2 + u_1[v_{2x} - i\zeta v_2 = rv_1] \\ &- [u_{2x} - i\zeta u_2 = ru_1] \cdot v_1 - u_2[v_{1x} + i\zeta v_1 = qv_2] = 0 \end{aligned}$$

由此即得 (5.3)。 我们同样可得 a，b，$\bar{a}$，$\bar{b}$ 的表达式(4.6)和 $w(\bar{\varphi}, \varphi) = 1$。由此推出

$$\bar{a}(\zeta)a(\zeta) + \bar{b}(\zeta)b(\zeta) = 1 \tag{5.5}$$

于是由(5.1)，(5.2)可求得 $\phi(\zeta, x)$，$\bar{\phi}(\zeta, x)$：

$$\phi(\zeta, x) = -a(\zeta)\bar{\varphi}(\zeta, x) + \bar{b}(\zeta)\varphi(\zeta, x) \tag{5.6}$$

$$\psi(\zeta, x) = \bar{a}(\zeta)\varphi(\zeta, x) + b(\zeta)\bar{\varphi}(\zeta, x) \qquad (5.7)$$

由 $\varphi_{2x} - i\zeta\varphi_2 = r\varphi_1$ 及边界条件 $\varphi_2 \to 0$ ($x \to -\infty$) 得

$$e^{i\zeta x}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{2i\zeta(x-y)} r(y) e^{i\zeta y}\varphi(y)dy \qquad (5.8)$$

将(5.8)的 $\varphi_2(x)$ 代入 $\varphi_{1x} + i\zeta\varphi_1 = q\varphi_2$ 并利用 $\varphi_1 \to e^{-i\zeta x}$ ($x \to -\infty$)，可得

$$e^{i\zeta x}\varphi_1(x) = 1 + \int_{-\infty}^{x} M(\zeta, x, y) e^{i\zeta y}\varphi_1(y)dy \qquad (5.9)$$

其中

$$M(\zeta, x, y) \equiv r(y)\int_{y}^{x} e^{2i\zeta(z-y)} q(z)dz \qquad (5.10)$$

在适当条件下，我们解析延拓 φ 至复平面 ζ ($\zeta = \xi + i\eta$) 的上半平面 ($\eta > 0$). 为看到这点，令

$$R_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} |y^n||r(y)|dy \qquad (5.11)$$

$$Q_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} |y^n||q(y)|dy \qquad (5.12)$$

由于设 r, q 充分急剧趋于零 ($x \to -\infty$)，因此，以上积分当 $n \geqslant 0$ 时存在. 对 $\eta > 0$，有

$$\begin{aligned} |e^{i\zeta x}\varphi_1(x)| &\leqslant 1 + \int_{-\infty}^{x} |q(z)|dz \int_{-\infty}^{z} |r(y)||e^{i\zeta y}\varphi_1(y)|dy \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{x} Q_0'(z)dz \int_{-\infty}^{z} R_0'(y)|e^{i\zeta y}\varphi_1(y)|dy \\ &\leqslant 1 + R_0(x)Q_0(x) + \frac{[R_0(x)Q_0(x)]^2}{(2!)^2} \\ &\quad + \frac{[R_0(x)Q_0(x)]^3}{(3!)^2} + \cdots \end{aligned}$$

或

$$|e^{i\zeta x}\varphi_1(x)| \leqslant I_0(s(x)) \qquad (5.13)$$

其中，$s(x) = 2(R_0(x), Q_0(x))^{\frac{1}{2}}$，$I_0(s)$ 为具虚变元的零阶

Bessel 函数，由(5.1)，(5.4)知 $x\to+\infty$，$\varphi_1 e^{i\zeta x}\to a(\zeta)$，故 $a(\zeta)$ 在 ζ 上半平面 ($\eta\geqslant 0$) 是有界的. 设 $R_0(\infty)$，$Q_0(\infty)$ 为有限，由(5.9)可得到 $e^{i\zeta x}\varphi_1(x)$ 的 Neumann 级数解

$$
\begin{aligned}
e^{i\zeta x}\varphi_1(x)=1&+\int_{-\infty}^{x}M(\zeta,x,y)dy\\
&+\int_{-\infty}^{x}M(\zeta,x,y)dy\int_{-\infty}^{y}M(\zeta,y,z)dz+\cdots
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

它在 ζ 上半平面为绝对收敛. 再进一步，如 (5.14) 再对 ζ 微分，则易知当 $\eta>0$ 时，$e^{i\zeta x}\varphi_1(x)$ 为解析的. 对于 $\eta=0$ 的解析性，仅要求 $R_0(\infty)$，$Q(\infty)$ 为有限是不够的，因此，在(5.10)中，ζ 含于指数中，对 ζ 微分必然带来 $(z-y)$ 项. 为了保证在 $\eta=0$ 处微分的存在性，必须设 r，q 趋于零的速度快于 $|x|^{-1}(|x|\to\pm\infty)$. 对于 $\bar\varphi$，ϕ，$\bar\phi$ 可如同 φ 一样讨论. 于是有如下定理

定理 5.1 如果满足条件

$$
R_0(\infty)<\infty,\quad Q_0(\infty)<\infty \tag{5.15}
$$

则 $e^{i\zeta x}\varphi(\zeta,x)$，$e^{-i\zeta x}\phi(\zeta,x)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta>0$)，而 $e^{-i\zeta x}\bar\varphi(\zeta,x)$，$e^{i\zeta x}\bar\phi(\zeta,x)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta<0$). 当 $\eta=0$ 时，上述四个函数均为有界. 如果对于给定的整数 n，进一步满足

$$
R_l(\infty)<\infty,\quad Q_l(\infty)<\infty,\quad l=0,1,2,\cdots,n \tag{5.16}
$$

则这四个函数为 ζ 的 n 次可微分函数 ($\eta=0$). 如(5.16)对一切正整数 n 都成立，则它们在包含实轴 ($\eta=0$) 的 ζ 平面上为解析的.

从(4.5)我们可得到如下的推论:

推论 5.1 如果满足条件(5.15)，则 $a(\zeta)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta>0$)，$\bar a(\zeta)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta<0$). 如(5.16)对一切 n 都成立，则在包含实轴 ($\eta=0$) 的 ζ 平面上，$a(\zeta)$ 和

$\bar{a}(\zeta)$ 都是解析的.

如果给 r,q 以更强的条件,用相同办法,可证如下定理

定理 5.2 如存在正常数 $\hat{R}$, $\hat{Q}$ 和 K, 使得对一切 x 成立

$$|r(x)| < \hat{R}e^{-2K|x|}, \quad |q(x)| < \hat{Q}e^{-2K|x|} \tag{5.17}$$

则 $e^{i\zeta x}\varphi(\zeta, x)$, $e^{-i\zeta x}\phi(\zeta, x)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta > -K$), 而 $e^{-i\zeta x}\bar{\varphi}(\zeta, x)$, $e^{i\zeta x}\bar{\phi}(\zeta, x)$ 为 ζ 的解析函数($\eta < +K$).

作为推论, 从(4.5)有

推论 5.2 如果满足 (5.17), 则 $a(\zeta)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta > -K$), $\bar{a}(\zeta)$ 为 ζ 的解析函数 ($\eta < +K$), $b(\zeta)$, $\bar{b}(\zeta)$ 为解析的 ($-K < \eta < +K$).

我们注意到,若 r, q 在紧致支集上,则在(5.17)中能选取 K 充分大,因此有第二个推论:

推论 5.3 设 r,q 在紧致支集上,于是(5.16)成立. 因此, $e^{i\zeta x}\varphi(\zeta, x)$, $e^{i\zeta x}\bar{\varphi}(\zeta, x)$, $e^{i\zeta x}\bar{\phi}(\zeta, x)$ 为 ζ 的整函数 (全平面上); $a(\zeta)$, $\bar{a}(\zeta)$, $b(\zeta)$, $\bar{b}(\zeta)$ 也是 ζ 的整函数.

(5.8),(5.9), (5.10)在 ζ 上半平面,当 $|\zeta| \to -\infty$ 时有渐近展开

$$\varphi_1 e^{i\zeta x} \to 1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{x} r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{5.18}$$

$$\varphi_2 e^{i\zeta x} \to -\frac{1}{2i\zeta} r(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{5.19}$$

类似有

$$\phi_1 e^{-i\zeta x} \to \frac{1}{2i\zeta} q(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{5.20}$$

$$\phi_2 e^{-i\zeta x} \to 1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{x}^{\infty} r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{5.21}$$

而在 ζ 下半平面,当 $|\zeta| \to \infty$ 时有

$$\bar{\varphi}_1 e^{-i\zeta x} \to -\frac{1}{2i\zeta} q(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{5.22}$$

$$\varphi_2 e^{-i\zeta x} \to -1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{x} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.23)$$

$$\bar{\phi}_1 e^{i\zeta x} \to 1 + \frac{1}{2i\zeta}\int_{x}^{\infty} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.24)$$

$$\phi_2 e^{i\zeta x} \to \frac{-1}{2i\zeta} r(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.25)$$

因此，在相应的半平面上，当 $|\zeta| \to \infty$ 时有

$$a(\zeta) \to 1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.26)$$

$$\bar{a}(\zeta) \to 1 + \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.27)$$

当 $a(\zeta)$ 在上半平面 $(\eta > 0)$ 具有零点 ζ_k $(k = 1, 2, \cdots, N)$ (N 为有限数)时，则有

$$\varphi = b_k \psi \quad (5.28)$$

其中，b_k 为比例因子，当 r, q 为紧支集函数，则 $b_k = b(\zeta_k)$，而 $\bar{a}(\zeta)$ 在下半平面 $(\eta < 0)$ 具有零点 $\bar{\zeta}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, \bar{N})$，当 $\zeta = \bar{\zeta}_k$ 时，

$$\bar{\varphi} = \bar{b}_k \psi \quad (5.29)$$

如 r, q 为紧支集函数，则有 $\bar{b}_k = \bar{b}(\bar{\zeta}_k)$. 其中 N 和 $\bar{N}$ 均为有限数. 不同于 Schrödinger 方程（由于算子 L 的自共轭性），于此 a, $\bar{a}$ 的零点可能是多重的. 但此时可作为简单零点的极限来处理. 例如在 ζ_1 有二重零点，可认为 a 具有简单零点 ζ_1, ζ_2, 再令 $\zeta_2 \to \zeta_1$.

当 r 线性于 q 或 q^* 时，情况变成简单. 首先考虑

$$r = \alpha q \quad (5.30)$$

的情况，其中 α 为任何非零的、有限的复数. 此时易知

$$\bar{\phi}(\zeta, x) = S\phi(-\zeta, x) \quad (5.31)$$

$$\varphi(\zeta, x) = -\frac{1}{\alpha} S\varphi(-\zeta, x) \tag{5.32}$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

推得

$$\bar{a}(\zeta) = a(-\zeta) \tag{5.34}$$

$$\bar{b}(\zeta) = -\frac{1}{\alpha} b(-\zeta) \tag{5.35}$$

且 $a, \bar{a}$ 的零点为成对的，使得

$$\bar{N} = N \tag{5.36}$$

$$\bar{\zeta}_k = -\zeta_k (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{5.37}$$

对于

$$r = \alpha q^* \tag{5.38}$$

的情况，其中 α 为非零的、有限的实常数，有

$$\bar{\Phi}(\zeta, x) = S\psi^*(\zeta^*, x) \tag{5.39}$$

$$\bar{\varphi}(\zeta, x) = -\frac{1}{\alpha} S\varphi^*(\zeta^*, x) \tag{5.40}$$

于是有

$$\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*) \tag{5.41}$$

$$\bar{b}(\zeta) = -\frac{1}{\alpha} b^*(\zeta^*) \tag{5.42}$$

且 $a, \bar{a}$ 的零点是成对的，有

$$\bar{N} = N \tag{5.43}$$

$$\bar{\zeta}_k = \zeta_k, \ (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{5.44}$$

$$\bar{b}_k = -\frac{1}{\alpha} b_k^* \tag{5.45}$$

因此，如果 (5.30)，(5.38) 同时成立，r 和 r^* 都正比于 q，则

ζ_k 或者是纯虚数，或者 $-\zeta_k^*$ 也是特征值.

2）散射反演法

首先，我们求得四个由 (3.14) 定义的 Jost 函数的积分表示，再得到 Марченко 型的反散射积分方程. 为简单起见，设 r，q 在紧支集上，因此 (3.14) 的解和散射资料均为 ζ 的整函数. 我们定义围道 c 为在复平面 ζ 上，从 $\zeta=-\infty+i0^+$ 开始，从上越过 $a(\zeta)$ 的所有零点，终止于 $\zeta=+\infty+i0^+$. 类似地定义围道 $\bar{c}$，从 $\zeta=-\infty+i0^-$ 开始，从下越过 $\bar{a}(\zeta)$ 的所有零点，终止于 $\zeta=+\infty+i0^-$.

考虑积分

$$\oint \frac{d\zeta'}{a(\zeta')}\frac{\varphi(\zeta',x)}{\zeta'-\zeta}e^{i\zeta x} \tag{5.46}$$

其中，ζ 在 c 之下，从 (5.18)，(5.19)，(5.26) 可得它的值为 $-i\pi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. 由(5.1) $\varphi=a\bar{\psi}+b\psi$ 及另取包括 $\bar{\psi}$ 在下半平面的积分围道，由(5.24)，(5.25)可得

$$\bar{\psi}(\zeta,x)e^{i\zeta x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\cdot\frac{b(\zeta')}{a(\zeta')}\psi(\zeta' x)e^{i\zeta' x} \tag{5.47}$$

其中，ζ 在 c 之下. 类似考虑积分

$$\oint\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\frac{\bar{\varphi}(\zeta',x)}{a(\zeta')}e^{-i\zeta' x} \tag{5.48}$$

其中，ζ 在 $\bar{c}$ 之上，同样得到

$$\psi(\zeta,x)e^{-i\zeta x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\cdot\frac{\bar{b}(\zeta')}{\bar{a}(\zeta')}\bar{\psi}(\zeta',x)e^{-i\zeta x} \tag{5.49}$$

类似地，分别对 $\varphi e^{i\zeta x}$，$\bar{\varphi} e^{-i\zeta x}$ 取上述围道，可得

$$\bar{\varphi}(\zeta, x)e^{-i\zeta x} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} \cdot \frac{\bar{b}(\zeta')}{a(\zeta')}\varphi(\zeta', x)e^{-i\zeta x} \tag{5.50}$$

$$\varphi(\zeta, x)e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} \cdot \frac{b(\zeta')}{\bar{a}(\zeta')}\bar{\varphi}(\zeta', x)e^{i\zeta x} \tag{5.51}$$

其中，ζ 位于围道 $c, \bar{c}$ 之间。

现设 $\psi, \bar{\psi}, \varphi, \bar{\varphi}$ 能积分表示为

$$\psi(\zeta, x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s)e^{i\zeta s}ds \tag{5.52}$$

$$\bar{\psi}(\zeta, x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s)e^{-i\zeta s}ds \tag{5.53}$$

$$\varphi(\zeta, x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x} - \int_{-\infty}^x L(x, s)e^{-i\zeta s}ds \tag{5.54}$$

$$\bar{\varphi}(\zeta, x) = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-i\zeta x} - \int_{-\infty}^x \bar{L}(x, s)e^{i\zeta s}ds \tag{5.55}$$

其中，$K, \bar{K}, L, \bar{L}$ 均为列向量. 将这些表达式代入(5.47)，(5.49)，(5.50)，(5.51)并作富氏变换，可得如下 Марченко 型积分方程

$$\bar{K}(x, y) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y) + \int_x^\infty K(x, s) \cdot F(s+y)ds = 0, \quad (y > x) \tag{5.56}$$

$$K(x, y) - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{F}(x+y) - \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \cdot \bar{F}(s+y)ds = 0, \quad (y > x) \tag{5.57}$$

$$\bar{L}(x,y)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}G(x+y)-\int_{-\infty}^{x}L(x,s)\cdot G(s+y)ds=0,\ (x<y) \tag{5.58}$$

$$L(x,y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{G}(x+y)+\int_{-\infty}^{x}\bar{L}(x,s)\cdot \bar{G}(s+y)ds=0,\ (x>y) \tag{5.59}$$

其中

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{b(\zeta)}{a(\zeta)}e^{i\zeta x}d\zeta \tag{5.60}$$

$$\bar{F}(x)=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\bar{b}(\zeta)}{\bar{a}(\zeta)}e^{-i\zeta x}d\zeta \tag{5.61}$$

$$G(x)=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\bar{b}(\zeta)}{a(\zeta)}e^{-i\zeta x}d\zeta \tag{5.62}$$

$$\bar{G}(x)=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{b(\zeta)}{\bar{a}(\zeta)}e^{i\zeta x}d\zeta \tag{5.63}$$

以下证明 (5.52)—(5.55) 的积分核 $K(x,s)$, $\bar{K}(x,s)$, $L(x,s)$, $\bar{L}(x,s)$ 的存在唯一性. 首先从(5.52)开始，要求它满足(3.14)，即将(5.52)代入

$$\begin{cases}\phi_{1x}+i\zeta\phi_1=q(x)\phi_2\\ \phi_{2x}-i\zeta\phi_2=r(x)\phi_1\end{cases} \tag{5.64}$$

可得

$$\int_{x}^{\infty}e^{i\zeta s}[(\partial x-\partial s)K_1(x,s)-q(x)K_2(x,s)]ds-[q(x)+2K_1(x,s)]e^{i\zeta x}+\lim_{s\to\infty}[K_1(x,s)e^{i\zeta s}]=0 \tag{5.65}$$

$$\int_{x}^{\infty}e^{i\zeta s}[(\partial x+\partial s)K_2(x,s)-r(x)K_1(x,s)]ds-\lim_{s\to\infty}[K_2(x,s)e^{i\zeta s}]=0 \tag{5.66}$$

故有

$$(\partial x - \partial s)K_1(x, s) - q(x)K_2(x, s) = 0 \qquad (5.67)$$

$$(\partial x - \partial s)K_2(x, s) - r(x)K_1(x, s) = 0 \qquad (5.68)$$

且满足边界条件

$$K_1(x, x) = -\frac{1}{2}q(x) \qquad (5.69)$$

$$\lim_{s\to\infty} K(x, s) = 0 \qquad (5.70)$$

为使得(5.67),(5.68)满足边界条件(5.69),(5.70)的解存在，引入坐标

$$\mu = \frac{1}{2}(x+s),\ \nu = \frac{1}{2}(x-s) \qquad (5.71)$$

于是(5.67),(5.68),(5.69),(5.70)变换为

$$\partial\nu K_1(\mu, \nu) - q(\mu+\nu)K_2(\mu, \nu) = 0 \qquad (5.72)$$

$$\partial\mu K_2(\mu, \nu) - r(\mu+\nu)K_1(\mu, \nu) = 0 \qquad (5.73)$$

$$K_1(\mu, 0) = -\frac{1}{2}q(\mu) \qquad (5.74)$$

$$\lim_{\mu-\nu\to\infty} K(\mu, \nu) = 0 \qquad (5.75)$$

从微分方程的特征理论，可知这个解 $K(\mu, \nu)$ 存在而且是唯一的．类似可证明 $\bar{K}$, L, $\bar{L}$ 的存在唯一性．

最后，我们证明 Марченко 型积分方程(5.56),(5.57),(5.58),(5.59)在一定条件下解的存在性．我们限于

$$r(x) = -q^*(x) \qquad (5.76)$$

或

$$r(x) = q^*(x) \qquad (5.77)$$

且

$$Q(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |q|dx < 0.523 \qquad (5.78)$$

的情况，当然这些条件并非充要的.

考虑对应于(5.56),(5.57)的齐次积分方程组 $(y > x)$

$$\begin{cases} \varphi_1(y) + \int_x^\infty \varphi_2(s) F(s+y) ds = 0 \\ \varphi_2(y) - \int_x^\infty \varphi_1(s) \bar{F}(s+y) ds = 0 \end{cases} \tag{5.79}$$

设 $\varphi(y) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ 为(5.79)的解，当 $y < x$ 时，它恒为零，由 Fredholm 定理，只需充分证明 $\varphi(y) \equiv 0$. 将 (5.79) 分别乘以 φ_1^*, φ_2^* 并对 y 积分，且因

$$\int_x^\infty |\varphi_i(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^\infty |\varphi_i(y)|^2 dy, \quad i = 1, 2$$

得到

$$\int_{-\infty}^\infty \Big\{ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \int_{-\infty}^\infty [\varphi_2(s)\varphi^*(y) F(s+y) \\ - \varphi_1(s)\varphi^*(y)\bar{F}(s+y)] ds \Big\} dy = 0 \tag{5.80}$$

现考虑两种情况. 首先，设 $r = -q^*$, 则由 (5.39)—(5.46) $(\alpha = -1)$ 可知 $\bar{F}(s+y) = F^*(s+y)$, 因此 (5.80) 变为

$$\int_{-\infty}^\infty \Big\{ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + 2i\mathrm{Im} \int_{-\infty}^\infty \varphi_1^*(y)\varphi_2(s) \\ \cdot F(s+y) ds \Big\} dy = 0 \tag{5.81}$$

上式的实部和虚部必须为零，因此得 $\varphi(y) = 0$, 即 (5.56), (5.57) 的解存在而且是唯一的. 其次，如 $r(x) = q^*(x)$, 此时问题为自共轭的，它的谱只能位于实轴上，且 $\bar{F}(s+y) = -F^*(s+y)$, 此时(5.80)为

$$\int_{-\infty}^\infty \Big\{ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + 2\mathrm{Re} \int_{-\infty}^\infty \varphi_1^*(x)\varphi_2(s) \\ \cdot F(s+y) ds \Big\} dy = 0 \tag{5.82}$$

如果我们要求满足条件

$$|a(\zeta)| > 0 \ (\eta \geqslant 0) \tag{5.83}$$

则在实轴上不存在离散特征值，因此

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} e^{i\zeta x} d\zeta \tag{5.84}$$

$\varphi_i(y)$ 为富氏变换为

$$\hat{\varphi}_i(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(y) e^{-i\xi y} dy \tag{5.85}$$

它满足 Parseval 关系式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_i|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_i|^2 d\xi \tag{5.86}$$

将 (5.84)—(5.86) 代入 (5.81)，并交换积分次序得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ |\hat{\varphi}_1(-\xi)|^2 + |\hat{\varphi}_2^*(\xi)|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\frac{b(\xi)}{a(\xi)} \hat{\varphi}_1(-\xi)\hat{\varphi}_2^*(\xi)\right]\Big\} d\xi = 0 \tag{5.87}$$

如果

$$\left|\frac{b(\xi)}{a(\xi)}\right| < 1 \tag{5.88}$$

则有

$$\left|2\mathrm{Re}\left[\frac{b(\xi)}{a(\xi)} \hat{\varphi}_1(-\xi)\hat{\varphi}_2(\xi)\right]\right| \leqslant 2|\hat{\varphi}_1(-\xi)||\hat{\varphi}_2^*(\xi)| \leqslant |\hat{\varphi}_1|^2 + |\hat{\varphi}_2|^2$$

因此(5.87)的解 $\varphi = 0$，于是再次得到 (5.56)，(5.57) 解的存在及唯一性。 由关系式 $\bar{a}a + b\bar{b} = 1$ 及 $\bar{a} = a^*$，$\bar{b} = b^*$，对于 $r = q^*$，条件(5.88)可写为

$$|a|^2 > \frac{1}{2} \tag{5.89}$$

它比条件(5.83)更强。如用条件

$$|a(\zeta)-1|<1-\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.90}$$

满足(5.89),则由(5.13)有

$$|a(\zeta)-1|\leqslant I_0(2Q(\infty))-1<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

因此条件

$$Q(\infty)<0.523 \tag{5.78}$$

是充分的.

第六节　进化方程的渐近解（$t\to\infty$）

在前面,我们已阐明了散射反演法,并指出了能用此法求解的一类进化方程. 这一节,为了决定(4.30)进化方程解的渐近状态,我们需要求解积分方程组（$y>x$）

$$\begin{cases} K(x,y;t)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bar{F}(x+y;t) \\ \quad -\int_x^\infty \bar{K}(x,s;t)\bar{F}(s+y;t)ds=0 \\ \bar{K}(x,y;t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y;t) \\ \quad +\int_x^\infty K(x,s;t)F(s+y;t)ds=0 \end{cases} \tag{6.1}$$

渐近解的证明类似于 KdV 方程,但在某些重要方面也不相同. 下面我们就离散谱、连续谱、任意谱(它们的组合)分别加以讨论,并对离散谱进行估计.

1. 离散谱

首先,考虑方程组(6.1)的可解性. 散射问题(3.14)和特征值问题(3.33)的重大差别为(3.14)所对应的积分方程组(6.1)不一定有解和唯一解,且进化方程的解在有限时间之后

可能变成无界．我们用例子解释之．设 $q(x,0)$，$r(x,0)$ 为光滑的初始条件，且满足 (5.15)，它的谱由二类特征值组成；$\zeta(\mathrm{Im}\zeta>0)$ 和 $\xi(\mathrm{Im}\zeta<0)$，则

$$
\begin{aligned}
F(z,t) &= ice^{i\zeta x-2A_0(\zeta)t} \\
\bar{F}(z,t) &= i\bar{c}e^{-i\bar{\zeta}t+2A_0(\zeta)t}
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

其中，$c,\bar{c}$ 为常数，$A_0(\zeta)$ 为对应的线性色散关系．(6.1)积分方程的核是退化的，容易求解．从关系式

$$
\begin{cases}
K_1(x,x;t) = -\dfrac{1}{2}q(x,t) \\
K_2(x,x;t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^\infty q(x,t)r(x,t)dx \\
\bar{K}_2(x,x;t) = \dfrac{1}{2}r(x,t)
\end{cases}
\tag{6.3}
$$

可得

$$
\begin{cases}
q(x,t) = -\dfrac{2i\bar{c}e^{2A_0(\zeta)t-2i\bar{\zeta}x}}{D(x,t)} \\
r(x,t) = \dfrac{2ice^{-2A_0(\zeta)+2i\zeta x}}{D(x,t)} \\
\displaystyle\int_x^\infty q(x,t)r(x,t)dx = \dfrac{2i\bar{c}ce^{2(A_0(\bar{\zeta})-A_0(\zeta))t+2i(\zeta-\bar{\zeta})x}}{(\zeta-\bar{\zeta})D(x,t)}
\end{cases}
\tag{6.4}
$$

其中

$$
D(x,t) = 1-\frac{c\bar{c}}{(\zeta-\bar{\zeta})^2}e^{2(A_0(\bar{\zeta})-A_0(\zeta))t+2i(\zeta-\bar{\zeta})x}
\tag{6.5}
$$

于是我们可以看到，如果 $A_0(\zeta)$，$q(x,0)$，$r(x,0)$ 不受限制，在某些可数集 $(x,0)$ 上，$D(x,t)=0$，则在这些点上，对应于(6.1)的齐次积分方程具有无穷多解，因而(6.1)无解．由假设，$q(x,0)$，$r(x,0)$ 为光滑，且当 $|x|\to\infty$ 急剧趋于 0，这些点在 $t=0$ 时不产生，但在有限时间后，在 $D(x,t)=$

0 的特殊点 x，$q(x,t)$，$r(x,t)$ 变为无界．因此，即使 r，q 初始时满足(5.15)，但随时间的发展(依方程(4.30))，q，r 在某些特殊的点 x 的位置上将产生“爆裂”(*burst*)．这种“爆裂”的孤立子在 KdV 方程中是不发生的．它们的出现显示出散射问题(3.14)和特征值问题(3.33)的重大差别．对于特征值问题(3.33)，如果它满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u|dx<\infty \quad (t=0) \tag{6.6}$$

则它的解对 $t>0$ 恒满足．这种“爆裂”现象具有错综复杂性，在物理中有待于核实和论证．

而当

$$r(x,t)=\alpha q^*(x,t)\ (\alpha\ 为实常数) \tag{6.7}$$

则这种情况不发生．因第一个守恒密度 $\int_{-\infty}^{\infty}qr\,dx$ 为时间不变量，且 $\int_{x}^{\infty}qr\,dx$ 有界，因此 $D(x,t)\neq 0$，(6.4)给出进化方程的整体解．

我们知道(6.7)包括两种特殊情况($\alpha=1$，$\alpha=-1$)，(6.1)的唯一解存在，但我们未得到(6.1)在一般情况下存在唯一解的充分必要条件．为简单起见，今后设(6.1)的唯一解存在．(6.4)的解能写为

$$q(x,t)=i\bar{c}e^{-i\varphi}\mathrm{sech}\theta \tag{6.8}$$

其中

$$\varphi=i(A_0(\zeta)+A_0(\bar{\zeta}))t+(\bar{\zeta}+\zeta)x-i\gamma$$
$$\theta=(A_0(\zeta)-A_0(\bar{\zeta}))t+i(\zeta-\bar{\zeta})x+\gamma$$
$$e^{2\gamma}=-\frac{c\bar{c}}{(\zeta-\bar{\zeta})^2}$$

它是基本的孤立子解，一种不变形的、局部的波具有运行速度

$$V = \mathrm{Re}\left\{\frac{A_0(\zeta) - A_0(\bar{\zeta})}{-i(\zeta - \bar{\zeta})}\right\} \tag{6.9}$$

其振幅正比于 $(\zeta - \bar{\zeta})$，波长为 $1/(\zeta - \bar{\zeta})$. 这些波的基本特征为非线性的，它在线性问题中是不出现的. 我们举出两个例子. 在 Захаров-Шабат 问题

$$q_t - iq_{xx} - 2iq^2q^* = 0$$
$$q|_{t=0} = q_0(x)$$

中，$A_0(\zeta) = -2i\zeta^2$，$r = -q^*$，$\bar{c} = c^*$，$\bar{\zeta} = \zeta^* = \xi - i\eta$，且

$$q(x, t) = 2\eta e^{(-4i(\xi^2-\eta^2)t - 2i\xi x + i\varphi)}\mathrm{sech}\{2\eta(x - x_0) + 8\eta\xi t\} \tag{6.10}$$

这种孤立子为振动载波的包络，其振幅和波长依赖于 η，包络具有不变波形和速度 4ξ. 又如在 Sine-Gordon 方程中，

$$u_{xt} = \sin u$$

物理空间的变元为

$$X = x + t,\ T = x - t,\ u = -\int_{-\infty}^{x} 2q\,dz$$

其中，$A_0(\zeta) = \frac{i}{4\zeta}$，$r = -q$，$\bar{\zeta} = -\zeta = -i\eta$，$\bar{c} = -c$，孤立子解为

$$u(X, T) = 4\tan^{-1}\left\{\exp\left[\left(c\eta + \frac{1}{4\eta}\right)(X - X_0) + \left(\eta - \frac{1}{4\eta}\right)T\right]\right\}, \tag{6.11}$$

它为扭结 (*kink*).

用(3.14)求解的一般特征值问题，只要谱是纯离散的，积分核是退化的，那么(6.1)就能求解. 当然，必须满足 (6.1) 解存在的条件. 于是可得N孤立子解. 对于某些特别的方程已为 Hirota 等计算得到. 当 t 很大时，孤立子以不同的速度分

开运行，它的渐近解为N个分开的具有形式(6.8)的波．这种分离过程已为 Захаров, Шабат 对 $r = -q^*$ 情况下讨论过，他们证明了这种孤立子之间的相互作用的渐近效应仅是位相平移．

从(6.9)可知，某些特征值使它对应的孤立子解具有相同的速度，这些孤立子当 $t \to \infty$时不分开．这种现象在 KdV 方程中是不发生的．在 Захаров, Шабат 问题中，$R(\zeta) = \zeta_0$ 的情况，已被分析过．在 Sine-Gordon 方程中，$|\zeta| = c_0$，已被 Lamb (1971)，AKNS (1973)讨论过．

$$u(X, T) = 4\tan^{-1}\left[\frac{\eta\cos\{\xi(\eta(T - T_0)) - (4-\nu)x\}}{\xi\cosh\{\eta(\nu(x - x_0)) - (4-\nu)T\}}\right]$$

其中，$\nu = 2 + (1/2|\zeta|^2)$．

我们前面已经知道，任何整函数之商取为 $A_0(\zeta)$，它所形成的进化方程能用散射反演方法求解． 如果 $A_0(\zeta)$ 具有极点，我们从(6.9)可看到，当特征值靠近此极点时，具有非常大的速度，例如 Sine-Gordon 方程，此时的运行速度接近于光速．当然，这种高速有其他的物理解释，但它的存在是很有意义的．

2. 连续谱

现考虑连续谱对渐进解的贡献．我们从最简单的可能情况开始．设初始值满足

$$R(\infty)Q(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |r|\,dx \int_{-\infty}^{\infty} |q|\,dx < 0.817 \quad (6.12)$$

和

$$R(\infty)Q(\infty) < 0.383 \quad (6.13)$$

条件(6.12)保证不存在离散特征值，(6.13)保证运用散射反演法的合法性．散射资料随时间 t 的发展为

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(k)}{a(k)} e^{i(kx+2iA_0(k)t)}dk \quad (6.14)$$

$$\bar{F}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)}e^{-i(kx+2iA_0(k)t)}dk \tag{6.15}$$

当 $t\to\infty$ 时，对积分的主要贡献在定常点 $k=K$ 处的附近，即有

$$\chi'(k)=\frac{x}{t}+2iA_0(K)=0\left(\frac{x}{t}\ 为固定\right) \tag{6.16}$$

$$\chi(k)\approx\chi(K)+(k-K)^2\chi''(K) \tag{6.17}$$

例如，$A_0(\zeta)=-2i\zeta^2$，它的进化方程为

$$\begin{cases}iq_t+q_{xx}-2(qr)q=0\\ ir_t-r_{xx}+2(qr)r=0\end{cases} \tag{6.18}$$

(6.16) 变为

$$x/t=-8K \tag{6.19}$$

对于 F 的积分路线旋转 $\frac{\pi}{4}$，对 $\bar{F}$ 旋转 $-\frac{\pi}{4}$，使它同于 $\chi''(K)$ 的符号，于是当 $t\to\infty$，$\frac{x}{t}$ 为固定时可得：

$$\begin{cases}F(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\frac{b}{a}\left(-\frac{x}{8t}\right)\\ \quad\cdot\exp\left[-\frac{i}{16}\left(\frac{x}{t}\right)^2t+i\frac{\pi}{4}\right]+O(t^{-\frac{3}{2}})\\ \bar{F}(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{x}{8t}\right)\\ \quad\cdot\exp\left[\frac{i}{16}\left(\frac{x}{t}\right)^2t-i\frac{\pi}{4}\right]+O(t^{-\frac{3}{2}})\end{cases} \tag{6.20}$$

积分方程(6.1)能联合为

$$K_1(x,y;t)-\bar{F}(x+y;t)+\iint_x^\infty K_1(x,z;t)\cdot F(z+s;t)\bar{F}(s+y;t)dzds=0 \tag{6.21}$$

对于 $\bar{K}_2(x,y;t)$ 也有类似方程。能寻求(6.21)有如下形式

的近似解

$$K_1(X,Y;t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}f(X,Y)\cdot\exp\left[\frac{i}{16}(X+Y)^2t-\frac{i\pi}{4}\right]+\cdots\quad(6.22)$$

其中，$X=\frac{x}{t}$，$Y=y/t$. 将(6.20)，(6.22)代入(6.21)，并计算在定常点的积分，可得

$$f(X,Y)=\frac{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{X+Y}{8}\right)}{1-\alpha\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{X+Y}{8}\right)\frac{b}{a}\left(-\frac{X+Y}{8}\right)}\quad(6.23)$$

其中

$$\text{当}X\neq Y\text{时}\quad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\text{当}X=Y\text{时}\quad \alpha=\frac{1}{4}$$

因 $q(x,t)=2K_1(x,x;t)$，故有

$$q(x,t)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{x}{4t}\right)}{1-\frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(-\frac{x}{4t}\right)\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{x}{4t}\right)}\cdot\exp\left[\frac{i}{4}\left(\frac{x}{t}\right)^2t-\frac{i\pi}{4}\right]\quad(6.24)$$

类似有

$$r(x,t)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{\frac{b}{a}\left(-\frac{x}{4t}\right)}{1-\frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(-\frac{x}{4t}\right)\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left(-\frac{x}{4t}\right)}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{i}{4}\left(\frac{x}{t}\right)^2 t + \frac{i\pi}{4}\right] \tag{6.25}$$

条件(6.13)保证在(6.23)中分母不为零．在 KdV 方程的渐近近似解中，对应于(6.24)，(6.25)的解不是一致成立的．对于它寻求相似解是必要的．例如，对于 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{6.26}$$

可找到它的渐近近似解

$$u(x,t) \sim \frac{r_0((i/2)\sqrt{x/3t})\left(\frac{x}{3t}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-2\left(\frac{x}{3t}\right)^{\frac{3}{2}}t}}{2\sqrt{3\pi t}}\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \tag{6.27}$$

其中，$r_0(k)$ 为初始反射系数．(6.26)的相似解为

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}}\left[f(\eta) - \frac{1}{(3t)^{1/3}} f_1(\eta) + \frac{1}{(3t)^{2/3}} \cdot f_2(\eta) + \cdots\right] \tag{6.28}$$

其中，$f(\eta)$ 满足非线性方程

$$f''' + 6ff' - (2f + \eta f') = 0 \tag{6.29}$$

其他的 $f_k(\eta)$ 均满足线性方程，$\eta = \frac{x}{(3t)^{1/3}} = O(1)$．如 $|r_0(0)| > 1$，$f(\eta)$ 具有二阶极点并在有限位置上变为无界．如 $|r_0(0)| < 1$，$f(\eta)$ 当 $\eta \to -\infty$ 时为振荡的，且有形式

$$f(\eta) = 2d(-\eta)^{1/4}\cos\theta - 2d^2(-\eta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \cos 2\theta) + O((\eta)^{-\frac{5}{4}}) \tag{6.30}$$

其中，

$$\theta = \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} - 3d^2\ln(-\eta) + \theta_0 + O((-\eta)^{-\frac{3}{2}}),$$

d 和 θ_0 均为依赖于 $r_0(0)$ 的常数．若 $|r(0)| = 1$，则 $f(\eta)$ 具有渐近表达式 ($\eta \to -\infty$)

$$f(\eta) = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}(-2\eta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-2\eta)^{-2}$$

$$- \frac{5}{2}(-2\eta)^{-\frac{7}{2}} + O((-2\eta)^{-5}) \qquad (6.31)$$

在我们的问题中,(6.24),(6.25)是一致成立的,但我们仍期望有相似解作为解的渐近表示,这个相似解具有形式

$$q(x, t) = Q_0 t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i}{4}\frac{x^2}{t} + 2iQ_0R_0 \log t\right) \qquad (6.32)$$

$$r(x, t) = R_0 t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{i}{4}x^2/t - 2iQ_0R_0 \log t\right) \qquad (6.33)$$

其中,Q_0, R_0 均为常数. 当 Q_0, R_0 为实数时,(6.32),(6.33)是和(6.24),(6.25) 相一致. 事实上,如果 $|\mathrm{Im}(Q_0, R_0)| > \frac{1}{4}$,则当 $t\to\infty$ 时 r 或 q 为无界增长. 这种行态反映了进化方程(6.18)的某种不稳定性. 在空间曲率 (q_{xx}, r_{xx}) 很小的区域上,(6.18) 能为简单方程组

$$\begin{cases} iq_t - 2(qr)q = 0 \\ ir_t + 2(qr)r = 0 \end{cases} \qquad (6.34)$$

所近似. 当 qr 为一常数,且 $\mathrm{Im}(qr) \neq 0$ 时,则 q 或 r 指数增长,但条件(6.13)保证了这种不稳定性不发生,而解具有好的行态.

因此,如果初始条件满足条件(6.12),(6.13),则非线性进化方程(6.18)的解能为(6.24),(6.25)所近似. 如果初始条件是"小的",例如

$$R(\infty)Q(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}|r|dx\int_{-\infty}^{\infty}|q|dx \ll 1$$

且进化方程的非线性项是不重要的,我们期望它的解能为线性化问题的解所近似.

3.离散谱的估计

AKNS 非线性进化方程的重要特征是能用散射反演法求解，它们的解具有简单的渐近性质（当 $t\to\infty$ 时），连续谱代数衰减，而决定渐近解特征的是初始时刻散射问题的离散谱．这一节，我们将综述（3.14）离散特征值的某些估计，即有关 $a(\zeta)$，$\bar{a}(\zeta)$ 零点位置的估计．

我们知道，如果 $r(x)$，$q(x)$ 为相关，则 $\bar{a}(\zeta)$ 的零点能变换为 $a(\zeta)$ 的零点．若 $r(x)$，$q(x)$ 为无关的，则 $\bar{a}(\zeta)$ 的零点必须重新计算．

现设

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n|q(x)|dx<\infty \\ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^n|r(x)|dx<\infty\end{cases}\quad \forall n \tag{6.35}$$

则 $a(\zeta)$，$\bar{a}(\zeta)$ 在 ζ 的全平面上解析（包括实轴，$\mathrm{Im}\zeta=0$），简记

$$R=\int_{-\infty}^{\infty}|r|dx,\ Q=\int_{-\infty}^{\infty}|q|dx \tag{6.36}$$

我们作以下分析：

1）在 $\mathrm{Im}(\zeta)\geqslant 0$ 上 $a(\zeta)$具有有限个零点． 如前所指出，条件（6.35）保证了 $a(\zeta)$ 在 $\mathrm{Im}\zeta\geqslant 0$ 上为解析，且 $a(\zeta)\to 1$（$|\zeta|\to\infty$）．因此 $a(\zeta)$ 的零点是孤立的，且位于有界区域之内，$a(\zeta)$ 至多有有限个零点．

2）$a(\zeta)$ 具有零点在 $\mathrm{Im}\zeta=0$ 上，此时不存在平方可积的特征函数，孤立子解也是不存在的．

3）设 N 表示 $a(\zeta)$ 在 $\mathrm{Im}\zeta>0$ 上的零点数目，其中包括非简单的多重零点． 设 $|\zeta_0|$ 表示含有 $a(\zeta)$ 的一切零点的圆的半径．令 $\xi_+>|\zeta_0|$，$\xi_-<-|\zeta_0|$，则当 $|\xi_\pm|\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg(a(\xi_+))-\arg(a(\xi_-))\}\to N \tag{6.37}$$

4) 如前所述，如 r 正比于 q 或 q^*，那么 $\bar{a}(\zeta)$ 的零点是和 $a(\zeta)$ 的零点成对的. 如 $r(x)$, $q(x)$ 都是实的，则 $a(\zeta)$ 的零点自己也是成对的. 和这成对的特征值相对应的进化方程的特解称为"呼吸子"，0π 波动等，它具有异于通常孤立子的特殊特征.

5) 如果 $r=+q^*(x)$，则特征值问题(3.14)为自共轭的. 因此，当 $\mathrm{Im}\zeta>0$ 时不存在特征值.

6) 对于任意 r,q，如果

$$RQ=\int_{-\infty}^{\infty}|r|dx\int_{-\infty}^{\infty}|q|dx<0.817 \tag{6.38}$$

或更精确一点，如

$$I_0(2\sqrt{RQ})<2 \tag{6.39}$$

则 $a(\zeta)$ 在 $\mathrm{Im}\zeta\geqslant 0$ 上没有零点.

为了证明这一点，我们从(6.39)推出 $\mathrm{Im}\zeta\geqslant 0$，有

$$|a(\zeta)-1|<1 \tag{6.40}$$

因此而得证. 事实上，从(5.8)，(5.9)，(5.13)和

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_1(x)e^{i\zeta x}=a(\zeta)$$

有

$$a(\zeta)-1=\int_{-\infty}^{\infty}r(z)\int_z^{\infty}q(y)e^{2i\zeta(y-z)}dy(\varphi_1 e^{i\zeta z})dz$$

$$\begin{aligned}|a(\zeta)-1|&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|r(z)|\int_z^{\infty}|q(y)|dy|\varphi_1 e^{i\zeta z}|dz\\&\leqslant I_0(2\sqrt{RQ})-1\end{aligned} \tag{6.41}$$

因此，只需

$$I_0(2\sqrt{RQ})<2$$

即得(6.40).

7) 为了保证能用渐近方法，不仅要求满足(6.38)或

(6.39)，还要求满足条件

$$\left|\frac{b\bar{b}}{a\bar{a}}(\xi)\right| < 2 \ (\xi \text{ 为实的}) \tag{6.42}$$

从而推出

$$RQ < 0.383$$

事实上，因 $a\bar{a}+b\bar{b}=1$，(6.42) 能写为

$$|1-a\bar{a}(\xi)| < 2|a\bar{a}(\xi)|$$

如令 $a\bar{a}(\xi)=\alpha+i\beta$，则有

$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\beta^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

因此，要求 $|a\bar{a}|>\frac{1}{3}$，且 $|a|>\frac{1}{\sqrt{3}}$，$|\bar{a}|>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

最后，我们要求

$$|a(\xi)-1| < 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |\bar{a}(\xi)-1| < 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

而要满足此不等式，仅当

$$I_0(2\sqrt{RQ}) < 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即

$$RQ < 0.383$$

8）依模最大特征值 ζ_0 的估计，我们要求 $q(x)$，$r(x)$ 某些附加的光滑性，可得到 ζ 的三个上界.

a）设 $q(x)$ 对 x 连续可微，令

$$q'_m \equiv \max_x |q'(x)|, \quad A=\int_{-\infty}^{\infty}|qr|dx, \quad B=I_0(2\sqrt{RQ}) \tag{6.43}$$

如果

$$|\zeta| > \frac{B}{4}\left[A+\left\{A^2+\frac{4Rq'_m}{B}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]=\zeta_0 \tag{6.44}$$

则 $a(\zeta) \neq 0$. 因此，所有特征值必须位于圆内：$|\zeta| \leqslant \zeta_0$，其中，$\zeta_0$ 由 (6.44) 决定.

现证明由 (6.44) 可推出 $|a(\zeta)-1|<1$. 事实上，从 (6.41) 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_x^\infty q(y)e^{2i\zeta(y-x)}dy = \int_0^\infty q(x+p)e^{2i\zeta p}dp \\
&= q(x)\int_0^\infty e^{2i\zeta p}dp + \int_0^\infty q'(x+m)pe^{2i\zeta p}dp
\end{aligned}
$$

其中，$0 \leqslant m < p$.

$$
|I| \leqslant \frac{|q(x)|}{2|\zeta|} + \frac{q'_m}{4\eta^2} \tag{6.45}
$$

其中，$\eta = \mathrm{Im}\zeta$. 将(5.13)，(6.45)代入(6.41)，令

$$
I_0(2\sqrt{RQ})\left\{\frac{1}{2|\zeta|}\int_{-\infty}^\infty |rq|dx + \frac{1}{4\eta^2}Rq'_m\right\} < 1
$$

因 $|\zeta|^2 \geqslant \eta^2$，由(6.43)，上式成立只需

$$
|\zeta|^2 > B\left\{\frac{A|\zeta|}{2} + \frac{Rq'_m}{4}\right\}
$$

即为 (6.44).

b) 若 $q(x) \in c^2$，则可得到比(6.44)更好的界. 令 $q''_m = \max\limits_x |q''(x)|$，若设 ζ_1 满足

$$
\begin{aligned}
I_0(2\sqrt{RQ})&\left\{\frac{1}{2|\zeta_1|}\int_{-\infty}^\infty |rq|dx + \frac{1}{4|\zeta_1|^2}\right. \\
&\left.\cdot\int_{-\infty}^\infty |rq'|dx + \frac{1}{8\eta_1^3}Rq''_m\right\} < 1
\end{aligned} \tag{6.46}
$$

则 $a(\zeta) \neq 0$ (当 $|\zeta| > |\zeta_1|$ 时).

c) 我们注意到，从(6.45)，(6.46)所得的量是和多项式积分守恒量相关的，于是直接利用守恒律能得到 $|\zeta_0|$ 的另一种估计，如对某 $\zeta_0 > 0$，满足

$$\sum \frac{|c_n|}{|2\zeta_0|^n} < \infty \tag{6.47}$$

则 $a(\zeta) \neq 0$，当 $|\zeta| > \zeta_0$ 时。

第七节　散射反演法的数学理论基础

在前面几节里，我们已介绍了用散射反演法求解问题的大致过程，这只是一个求形式解的过程，其中不少步骤都有待于数学的严格化，例如：一维量子力学的 Schrödinger 方程的特征值问题解的存在性问题；由有界态和反射系数能否唯一确定位势 $q(x)$？散射矩阵应满足什么条件使位势 $q(x) \in L_2^1$ $\left(我们记\ L_2^1:\ \left\{p(x):\ \int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|(1+x^2)dx < \infty\right\}\right)$？Гельфанд-Марченко 积分方程在什么条件下存在唯一解？等等，特别是，如果我们要从散射反演法去寻找微分方程理论研究所需要的解（这是一条很好的新途径），我们还要对反射系数、积分方程解的可微性，由散射反演法构造出来的函数的可微性以及它是否满足微分方程作认真的检验和证明。所有这些在数学理论上需要回答的问题，我们把它称为“散射反演法的数学理论基础”。这一节我们主要介绍有关的重要结果，并对证明中带有普遍性的方法，附以少量的证明，详细地可参见[12]。

引理 1　对于每个 k，$\mathrm{Im}k \geq 0$，积分方程

$$m(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} D_k(t - x)q(t)m(t, k)dt$$

具有一个解 $m(x, k)$，它为 Schrödinger 方程

$$m'' + 2ikm' = q(x)m$$

具有边界条件 $m(x, k) \to 1 (x \to +\infty)$ 的唯一解，其中，

$$D_k(y) \equiv \int_0^y e^{2ikt}dt = \frac{1}{2ik}(e^{2iky}-1)$$

$m(x,k)$ 满足条件 $m(x,k)=m(x,-k)$，且有估计

$$\text{(i)} \quad |m(x,k)-1| \leqslant e^{\eta(x)/|k|} \cdot \frac{\eta(x)}{|k|}$$

$$\leqslant e^{\text{const}/|k|} \quad \frac{\text{const}}{|k|}, \ k \neq 0$$

$$\text{(ii)} \quad |m(x,k)-1|$$

$$\leqslant K \frac{\left(1+\max(-x,0)\int_x^\infty (1+|t|)|q(t)|dt\right)}{1+|k|}$$

$$\leqslant K_1 \frac{(1+\max(-x,0))}{1+|k|} \tag{7.1}$$

$$\text{(iii)} \quad |m'(x,k)| = \left|\frac{dm(x,k)}{dx}\right| \leqslant K_2$$

$$\cdot \frac{\int_x^\infty (1+|t|)|q(t)|dt}{1+|k|} \leqslant \frac{K_3}{1+|k|}, -\infty < x < \infty$$

$$\text{(iv)} \quad |m'(x,k)| \leqslant K_4 \frac{\int_x^\infty |q(t)|dt}{1+|k|}, \ 0 \leqslant x < \infty$$

其中，$\eta(x) = \int_x^\infty |q(t)|dt$，常数$K$以及 k_j 仅依赖于模

$$\int_{-\infty}^\infty (1+|x|^j)|q(x)|dx$$

$j=0, 1$ 或 2． 对于每个 x，$m(x,k)$ 在 $\text{Im}k>0$ 中解析，在 $\text{Im}k \geqslant 0$ 上连续，特别由 (ii)，$m(x,k)-1 \in H^{2+}$，其中 H^{2+} 表示函数 $h(k)$ 的 Hardy 空间，$H^{2+} = \{h(k) \in L^2(-\infty, \infty), \text{supp}\hat{h} \in (-\infty, 0)\}$，

$$\check{h}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2iky}h(k)dk$$

最后，$\dot{m}(x,k)=\frac{d}{dk}m(x,k)$ 对一切 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$ 存在 $k\neq 0$，$k\dot{m}(x,k)$ 对一切 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$ 连续，如 $q(x)\in L_2^1$，则 $\dot{m}(x,k)$ 也存在，且在 $k=0$ 处连续，我们有估计

(v) $|\dot{m}(x,k)|\leqslant \mathrm{const}(1+x^2)$，$\forall \mathrm{Im}k\geqslant 0$，$q\in L_2^1$

证 Volterra 积分方程的迭代总是收敛的，我们有

$$m(x,k)=1+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x,k)$$

其中

$$g_n(x,k)=\int_{x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n}D_k(x_1-x_2)\cdots D_k(x_n-x_{n-1})\cdot q(x_1)\cdots q(x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$|g_n(x,k)|\leqslant\int_{x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n}\frac{1}{|k|^n}|q(x_1)|\cdots|q(x_n)|dx_1\cdots dx_n$$
$$=\frac{1}{|k|^n}\frac{\left(\int_x^{\infty}|g(t)|dt\right)^n}{n!}$$

其中，我们用到了估计 $|D_k(y)|\leqslant\frac{1}{|k|}$；$\mathrm{Im}k\geqslant 0$，此即得到 (i)。

另外，

$$|g_n(x,k)|\leqslant\int_{x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n}(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_n-x_{n-1})\cdot|q(x_1)|\cdots|q(x_n)|dx_1\cdots dx_n$$
$$\leqslant\int_{x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n}(x_1-x)(x_2-x)\cdots(x_n-x)\cdot|q(x_1)|\cdots|q(x_n)|dx_1\cdots dx_n$$
$$=\frac{\left(\int_x^{\infty}(t-x)|q(t)|dt\right)^n}{n!}$$

其中，我们用到了估计 $|D_k(y)| \leqslant y$，$k \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，此即得到

$$|m(x, k) - 1| \leqslant e^{\gamma(x)}\gamma(x)$$

其中，

$$\gamma(x) = \int_x^\infty (t - x)|q(t)|\,dt$$

我们知道

$$\begin{aligned}|m(x, k)| &\leqslant 1 + \int_x^\infty (t - x)|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt \\ &= 1 + \int_x^\infty t|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt \\ &\qquad + \int_x^\infty (-x)|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt \\ &\leqslant 1 + \int_0^\infty t|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt \\ &\qquad + \int_x^\infty (-x)|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt\end{aligned}$$

注意到第二个不等式对正的 x 和负的 x 均成立，且有

$$\begin{aligned}&1 + \int_0^\infty t|q(t)|\,|m(t, k)|\,dt \\ &\quad \leqslant 1 + \left((1 + e^{\gamma(0)}\gamma(0))\int_0^\infty t|q(t)|\,dt\right) = K < \infty\end{aligned}$$

置 $M(x, k) = m(x, k)/K(1 + |x|)$，$p(x) = (1 + |x|)\cdot|q(x)| \in L^1$，我们有

$$|M(x,k)| \leqslant 1 + \int_x^\infty p(t)|M(t, k)|\,dt$$

由迭代求解可得

$$|M(x,k)| \leqslant \exp\left\{\int_x^\infty (1 + |t|)|q(t)|\,dt\right\} \leqslant K_1 < \infty$$

即

$$|m(x, k)| \leqslant K_2(1 + |x|)$$

如同上面所进行的那样，

$$|m-1| \leqslant \int_0^\infty t|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$+\int_x^\infty (-x)|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$\leqslant e^{\gamma(0)}\gamma(0)\int_0^\infty t|q(t)|dt$$

$$+(-x)K_2\int_x^\infty (1+|t|)|q(t)|dt$$

则对 $x \leqslant 0$，有

$$|m-1| \leqslant K_3(1+|x|)\int_x^\infty (1+|t|)|q(t)|dt$$

对 $x \geqslant 0$

$$|m-1| \leqslant e^{\gamma(0)}\gamma(x) \leqslant e^{\gamma(0)}\int_x^\infty t|q(t)|dt$$

联合 (i) 我们得到 (ii). (ii), (iv) 的估计根据

$$m'(x,k) = -\int_x^\infty e^{2ik(t-x)}q(t)m(t,k)dt$$

如同(ii)进行估计. 通过直接计算,可证明 m 为 Schrödinger 方程具有 $m \to 1$ $(x \to +\infty)$ 的唯一解，且由展成级数一致收敛性可知它在 $\mathrm{Im}k > 0$ 处解析,在 $\mathrm{Im}k \geqslant 0$ 上连续.

接下来考虑 $\dot{m}(x,k)$ 的估计,我们有

$$\dot{m}(x,k) = \int_x^\infty D_k(t-x)q(t)\dot{m}(t,k)dt$$

$$+\int_x^\infty \dot{D}_k(t-x)q(t)m(t,k)dt \quad (7.2)$$

对于 $q \in L_1^1$，利用不等式

$$|k\dot{D}_k(t-x)| = \int_0^{t-x} u\left[\frac{\partial}{\partial u}e^{2iku}\right]du \leqslant 2|t-x|$$

我们得到

$$\left|\int_x^\infty k\dot{D}_k(t-x)q(t)m(t,k)dt\right|$$

$$\leqslant K(1+\max(-x,0))\int_x^\infty(t-x)|q(t)|dt$$

$$\leqslant K(x)<\infty$$

我们看到 $\dot{m}(x,k)$ 存在 ($k\neq 0$, $\mathrm{Im}k\geqslant 0$)，且 $k\dot{m}(x,k)$ 连续(甚至 $k\to 0$)。事实上有，$\lim\limits_{k\to 0}k\dot{m}(x,k)=0$。对于 $q\in L_2^1$，由

$$|\dot{D}_k(t-x)|\leqslant\left|\int_0^{t-x}2iue^{2iku}du\right|\leqslant(t-x)^2$$

故有

$$\left|\int_x^\infty\dot{D}_k(t-x)q(t)m(t,k)dt\right|$$

$$\leqslant\int_x^\infty(t-x)^2|q(t)||m(t,k)|dt$$

设 $x<0$，则

$$\int_x^\infty t^2|q(t)||m(t,k)|dt=\int_0^\infty t^2|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$+\int_x^0 t^2|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty t^2|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$+x^2\int_x^0|q(t)||m(t,k)|dt$$

$$\leqslant\mathrm{const}(1+x^2)$$

上面最后一步不等式是由 $|m(t,k)|\leqslant K(1+\max(-t,0))$ 推出的，如 $x\geqslant 0$，则有

$$\int_x^\infty t^2|q(t)||m(t,k)|dt\leqslant K\int_0^\infty t^2|q(t)|dt$$

因此，对一切 x 有

$$\int_x^\infty t^2|q(t)||m(t,k)|dt\leqslant K(1-x\max(-x,0))$$

现设 $x \geqslant 0$，则有

$$\int_x^\infty (t-x)^2 |q(t)||m(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant \int_x^\infty t^2 |q(t)||m(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant K$$

如 $x \leqslant 0$，则有

$$\int_x^\infty (t-x)^2 |q(t)||m(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant 2\int_0^\infty t^2 |q(t)||m(t,k)|\,dt$$

$$+ 2x^2 \int_x^\infty |q(t)||m(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant 2K(1+x^2) + 2x^2 K \int_{-\infty}^\infty |q(t)|(1+|t|)\,dt$$

$$\leqslant K_1(t+x^2)$$

因此，

$$\int_x^\infty (t-x)^2 |q(t)||m(t,k)|\,dt \leqslant K_2(1-x)\max(-x,0)$$

故有

$$|\dot{m}(x,k)| \leqslant K_2(1 - x\max(-x,0))$$

$$+ \int_x^\infty (t-x)|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

迭代之，有

$$|\dot{m}(x,k)| \leqslant K_2(1 - x\max(-x,0))e^{\gamma(x)}$$

这个界保证了(7.2)中 $\dot{m}(x,k)$ 的逐次逼近序列的一致收敛性(对 k)，因此 $\dot{m}(x,k)$ 存在，且在 $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ 上连续，其中包括 $k=0$。

最后，对任何 x，

$$|\dot{m}(x,k)| \leqslant K_2(1+x^2) + \int_x^\infty t|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

$$+(-x)\int_x^{\infty}|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant K_2(1+x^2)+\int_0^{\infty}t|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

$$+|x|\int_x^{\infty}|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

$$\leqslant K_2(1+x^2)+K_2e^{\gamma(0)}(1+x^2)\int_0^{\infty}t|q(t)|\,dt$$

$$+|x|\int_0^{\infty}|q(t)||\dot{m}(t,k)|\,dt$$

即

$$h(x,k)\leqslant 1+\int_x^{\infty}(1+t^2)|q(t)||h(t,k)|\,dt$$

其中，$h=|\dot{m}(x,k)|/K_3(1+x^2)$，迭代之有

$$|h(x,k)|\leqslant\exp\left\{\int_x^{\infty}(1+t^2)|q(t)|\,dt\right\}$$

即

$$|\dot{m}(x,k)|\leqslant K_4(1+x^2)$$

这就证明了 (v) 和引理.

以下证明有关 $m(x,k)$ 在 $\operatorname{Im}k\geqslant 0$ 上零点的性质.

引理 2 对任何 x，$m(x,k)$ 在 $\operatorname{Im}k\geqslant 0$ 上有有限个零点，这些零点是简单的，且位于虚的 k 轴上，如 $k=i\beta\ (\beta>0)$ 为 $m(x,k)$ 的零点，则 $k^2=-\beta^2$ 为算子 $H=-\dfrac{d^2}{dy^2}+q(y)$ 在 $L^2\ (x<y<\infty)$ 上具有 Dirichlet 边界条件在 $y=x$ 上的非退化特征值，对任何 x，对于实的 k（除在 $k=0$ 以外）不存在零点；如 $m(x,0)=0$，我们说 Dirichlet 算子 $-\dfrac{d^2}{dy^2}+q(y)$ 在 $L^2\ (x<y<\infty)$ 上具有一个“虚的水平”(*Virtual level*)；$k^2=0$ 不是这个算子的特征值.

由引理 1，$m-1\in H^{2+}$，故对平移变换

$$m(x, k) = 1 + \int_0^\infty B(x, y) e^{2iky} dy$$

对每个 x，$B(x, y) \in L^2$ $(0 < y < \infty)$，B 具有如下的一系列性质.

引理 3 积分方程

$$B(x, y) = \int_{x+y}^\infty q(t) dt + \int_0^y dz \int_{x+y-z}^\infty dt q(t) B(t, z),$$
$$y \geqslant 0,$$

具有一个实的唯一解 $B(x, y)$，它满足

$$|B(x, y)| \leqslant e^{\gamma(x)} \eta(x + y)$$

特别，$B(x, y) \in L^1 \cap L^\infty$ $(0 < y < \infty)$，有

$$\|B(x, \cdot)\|_\infty \leqslant e^{\gamma(x)} \eta(x), \quad \|B(x, \cdot)\|_1 \leqslant e^{\gamma(x)} \gamma(x)$$

$B(x, y)$ 对 x, y 为绝对连续，且有

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} B(x,y) + q(x + y) \right| \leqslant e^{\gamma(x)} \eta(x + y) \eta(x)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} B(x,y) + q(x + y) \right| \leqslant 2e^{\gamma(x)} \eta(x + y) \eta(x)$$

$B(x, y)$ 为波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y) + q(x) B(x, y) = 0, \quad y \geqslant 0$$

具边界条件 $-\frac{\partial B(x, 0^+)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, 0^+)}{\partial y} = q(x)$ 的解.

最后，$m(x, k) = 1 + \int_0^\infty B(x, y) e^{2iky} dy$ 为引理 1 中的 Jost 函数.

证 类似于 Агранович Марченко[16] 的迭代求解.

$$B(x, y) = \sum_{n=0}^\infty K_n(x,y)$$

$$K_0(x, y) = \int_{x+y}^\infty q(t) dt$$

$$K_{n+1}(x,y)=\int_0^y dz\int_{x+y-z}^{\infty} q(t)K_n(t,z)dt, n=0,1,\cdots$$

我们证明

$$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{\gamma^n(x)}{n!}\eta(x+y), n\geqslant 0 \qquad (7.3)$$

设(7.3)对 n 成立 ($n=0$ 显然成立)，则有

$$|K_{n+1}(x,y)|\leqslant\int_0^y dz\int_{x+y-z}^{\infty}|q(t)|\eta(t+z)\frac{\gamma^n(t)}{n!}dt$$

$$\leqslant\eta(x+y)\int_0^y dz\int_{x+y-z}^{\infty}|q(t)|\frac{\gamma^n(t)}{n!}dt$$

$$=\eta(x+y)\left(\int_x^{x+y}|q(t)|\frac{\gamma^n(t)}{n!}\left(\int_{x+y-t}^{y}dz\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{x+y}^{\infty}|q(t)|\frac{\gamma^n(t)}{n!}\left(\int_0^y dz\right)dt\right)$$

$$=\eta(x+y)\left(\int_x^{x+y}|q(t)|\frac{\gamma^n(t)}{n!}(t-x)dt\right.$$

$$\left.+\int_{x+y}^{\infty}|q(t)|\frac{\gamma^n(t)}{n!}y\,dt\right)$$

$$\leqslant\eta(x+y)\int_x^{\infty}|q(t)|(t-x)\frac{\gamma^n(t)}{n!}dt$$

$$\leqslant\eta(x+y)\int_x^{\infty}|q(t)|(t-x)$$

$$\cdot\frac{\left(\int_0^{\infty}(u-x)|q(u)|du\right)^n}{n!}dt$$

$$=\eta(x+y)\frac{(\gamma(x))^{n+1}}{(n+1)!}$$

这就完成了归纳法的证明. 同时我们有 $|B(x,y)|\leqslant e^{\gamma(x)}\cdot\eta(x+y)$, 特别 $\|B(x,\cdot)\|_\infty\leqslant e^{\gamma(x)}\eta(x)$, 且

$$\|B(x,\cdot)\|_1 \leqslant e^{\gamma(x)}\int_0^\infty \eta(x+y)dy = e^{\gamma(x)}\gamma(x)$$

显然，B 为 x,y 的绝对连续函数，且易于直接验证 B 为波动方程的解．并有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}B(x,y)+q(x+y)\right|$$

$$=\left|-\int_0^y q(x+y-z)B(x+y-z,\ z)dz\right|$$

$$\leqslant \int_0^y |q(x+y-z)|e^{\gamma(x+y-z)}\eta(x+y)dz$$

$$\leqslant e^{\gamma(x)}\eta(x+y)\eta(x)$$

$\dfrac{\partial B(x,y)}{\partial y}$ 的计算是类似的．最后，若定义

$$m(x,k)=1+\int_0^\infty B(x,\ y)e^{2iky}dy$$

则上述估计表明 $m'(x,k)$ 存在，且

$$m'(x,k)=\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial x}B(x,y)\right]e^{2iky}dy$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial x}B(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}B(x,y)\right]e^{2iky}dy$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial y}B(x,y)\right]e^{2iky}dy$$

$$=-\int_0^\infty\left[\int_x^\infty q(t)B(t,y)dt\right]e^{2iky}dy$$

$$-B(x,0)-2ik\int_0^\infty B(x,\ y)e^{2iky}dy$$

由此可知 $m''(x,k)$ 几乎处处存在，且有

$$m''+2ikm'=qm$$

而 $|m(x,k)-1|\leqslant\|B(x,\cdot)\|_1\leqslant e^{\gamma(x)}\gamma(x)\to 0(x\to+\infty)$，因此 m 为引理 1 的 Jost 函数(唯一的)．引理证毕．

现设 $m_1(x,k)$，$m_2(x,k)$ 为引理1的 Jost 函数，令 $f_1(x,k)\equiv e^{ikx}m_1(x,k)$，$f_2(x,k)\equiv e^{-ikx}m_2(x,k)$，则 $f_1(x,k)$，$f_2(x,k)$ 为 Schrödinger 方程

$$-f_j''+qf_j=k^2f_j,\quad j=1,2$$

具有 $f_1\sim e^{ikx}(x\to+\infty)$，$f_2\sim e^{-ikx}(x\to-\infty)$ 的解，现 $f_1(x,k)$ 和 $f_1(x,-k)$ 为方程的两个线性无关的解 $(k\neq 0)$. 事实上，Wronski 行列式

$$\begin{aligned}[f_1(x,k),f_1(x,-k)]&\equiv f_1'(x,k)f_1(x,-k)\\ -f_1(x,k)f_1'(x,-k)&=\text{const}=\lim_{x\to+\infty}\big(e^{ikx}(ik)e^{-ikx}\\ -e^{ikx}(-ik)e^{ikx}+o(1)\big)&=2ik\neq 0\end{aligned}$$

类似地，$[f_2(x,k),f_2(x,-k)]=-2ik\neq 0$.

因此存在(唯一)函数 $T_1(k)$，$T_2(k)$，$R_1(k)$，$R_2(k)$ (分别称之为穿透系数和反射系数)，使得

$$f_2(x,k)=\frac{R_1(k)}{T_1(k)}f_1(x,k)+\frac{1}{T_1(k)}f_1(x,-k)$$

$$f_1(x,k)=\frac{R_2(k)}{T_2(k)}f_2(x,k)+\frac{1}{T_2(k)}f_2(x,-k)$$

其中，$k\neq 0$. 对于 m_1,m_2，有关系式

$$T_1(k)m_2(x,k)=R_1(k)e^{2ikx}m_1(x,k)+m_1(x,-k)$$

$$T_2(k)m_1(x,k)=R_2(k)e^{-2ikx}m_2(x,k)+m_2(x,-k)$$

我们定义散射矩阵为

$$S(k)=\begin{pmatrix}T_1(k)R_2(k)\\ R_1(k)T_2(k)\end{pmatrix},\quad k\neq 0$$

则

$$\frac{1}{T_1(k)}=\frac{1}{2ik}[f_1(x,k),f_2(x,k)]=\frac{1}{T_2(k)}$$

$$\frac{R_1(k)}{T_1(k)}=\frac{1}{2ik}[f_2(x,k),\ f_1(x,k)]$$

$$\frac{R_2(k)}{T_2(k)}=\frac{1}{2ik}[f_2(x,-k),\ f_1(x,k)]$$

从以上这些我们看到

$$T_1(k)=T_2(k)=T(k)$$

$$R_1(k)T_2(-k)+R_2(-k)T_1(k)=0$$

且

$$\overline{T(k)}=T(-k),\ \overline{R_1(k)}=R_1(-k),\overline{R_2(k)}=R_2(-k)$$

将其中一个代数关系式代入另一个，即得

$$|T(k)|^2+|R_1(k)|^2=1=|T(k)|^2+|R_2(k)|^2$$

因此，对于实的 $k\neq 0$，$S(k)$ 是 U 阵。

由

$$\begin{aligned}m_1(x,k)&=1+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2ik(t-x)}-1}{2ik}\right)q(t)m_1(t,\ k)dt\\&=e^{-2ikx}\left(\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(t)m_1(t,k)dt\right)\\&\quad+\left(1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(t)m_1(t,k)dt+o(1)\right.\end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned}m_1(x,k)&=\frac{R_2(k)}{T(k)}e^{-2ikx}m_2(x,k)+\frac{1}{T(k)}m_2(x,-k)\\&=e^{-2ikx}\frac{R_2(k)}{T(k)}+\frac{1}{T(k)}+o(1)\end{aligned}$$

因此，我们得到散射系数的积分表达式

$$\frac{R_2(k)}{T(k)}=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2ikx}q(t)m_1(t,k)dt$$

$$\frac{1}{T(k)}=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(t)m_1(t,\ k)dt$$

对于散射矩阵 S 的主要性质可综述为如下定理。

如 $q\in L_2^1$，则有二种可能：

(i) $0<\text{const}\leqslant|T(k)|$， 因此 $|R_j(k)|\leqslant\text{const}<1$，$j=1, 2$，或

(ii) $T(k)=\alpha k+o(k)$， $\alpha\neq 0$，当 $k\to 0$ 时，$\operatorname{Im} k\geqslant 0$

$1+R_j(k)=\alpha_j k+o(k)$，$j=1,2$，当 $k\to 0$ 时，k 为实的.

VI（实性）

$\overline{T(k)}=T(-k)$，$\overline{R_j(k)}=R_j(-k)$，$j=1, 2$

定理 2

$$\frac{R(k)}{T(k)}=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ikt}\pi_1(t)\,dt$$

$$\frac{1}{T}=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(t)\,dt-\frac{1}{2ik}\int_0^{\infty}\pi_2(t)e^{2ikt}\,dt$$

其中

$$|\pi_1(y)|\leqslant|q(y)|+kL(y)\in L^1(-\infty<y<\infty)$$

$$|\pi_2(y)|\leqslant K\left(\int_{y/2}^{\infty}|q(t)|\,dt+\int_{-\infty}^{y/2}|q(t)|\,dt\right)\in L^1$$

$$(0<y<\infty)$$

$$L(y)=\int_y^{\infty}|q(t)|\,dt,\quad y\geqslant 0;$$

$$L(y)=\int_{-\infty}^{y}|q(t)|\,dt,\quad y<0.$$

对于 $T(k)$，$m_1(x,k)$，$m_2(x, k)$ 的渐近性，有如下结果

定理 3 (i) 如 $q\in L_1^1$，则

$$m_1(x,k)=1+\frac{1}{2ik}\int_x^{\infty}(e^{2ik(t-x)}-1)q(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2(2ik)^2}\left(\int_x^{\infty}q(t)\,dt\right)^2+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

如 $q \in L_2^1$，则有二种可能：

(i) $0 < \text{const} \leqslant |T(k)|$， 因此 $|R_j(k)| \leqslant \text{const} < 1$，$j=1, 2$，或

(ii) $T(k) = \alpha k + o(k)$，$\alpha \neq 0$，当 $k \to 0$ 时，$\text{Im}\, k \geqslant 0$

$1 + R_j(k) = \alpha_j k + o(k)$，$j=1,2$，当 $k \to 0$ 时，k 为实的.

VI（实性）

$\overline{T(k)} = T(-k)$，$\overline{R_j(k)} = R_j(-k)$，$j=1, 2$

定理 2

$$\frac{R(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ikt}\pi_1(t)\,dt$$

$$\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} q(t)\,dt - \frac{1}{2ik}\int_0^{\infty} \pi_2(t)e^{2ikt}\,dt$$

其中

$$|\pi_1(y)| \leqslant |q(y)| + kL(y) \in L^1(-\infty < y < \infty)$$

$$|\pi_2(y)| \leqslant K\left(\int_{y/2}^{\infty} |q(t)|\,dt + \int_{-\infty}^{y/2} |q(t)|\,dt\right) \in L^1$$

$$(0 < y < \infty)$$

$$L(y) = \int_y^{\infty} |q(t)|\,dt, \quad y \geqslant 0;$$

$$L(y) = \int_{-\infty}^{y} |q(t)|\,dt, \quad y < 0.$$

对于 $T(k)$，$m_1(x,k)$，$m_2(x,k)$ 的渐近性，有如下结果

定理 3 (i) 如 $q \in L_1^1$，则

$$m_1(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^{\infty} (e^{2ik(t-x)} - 1)q(t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2(2ik)^2}\left(\int_x^{\infty} q(t)\,dt\right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$m_2(x,k)=1+\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x}(e^{2ik(x-t)}-1)q(t)dt$$

$$+\frac{1}{2(2ik)^2}\left(\int_x^{\infty}q(t)dt\right)^2+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$T(k)=1+\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(t)dt+\frac{1}{2(2ik)^2}$$

$$\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}q(t)dt\right)^2+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

(ii) 如 $q\in L_1^1$, $q'\in L^1$, 则

$$m_1(x,k)=1-\frac{1}{2ik}\int_x^{\infty}q(t)dt+\frac{1}{2(2ik)^2}$$

$$\cdot\left(\int_x^{\infty}q(t)dt\right)^2-\frac{q(x)}{(2ik)^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$m_2(x,k)=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x}q(t)dt+\frac{1}{2(2ik)^2}$$

$$\cdot\left(\int_{-\infty}^{x}q(t)dt\right)^2-\frac{q(x)}{(2ik)^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

证明是直接的。

对于位势 $q(x)$，我们有如下关于它和散射资料关系的重要表达式和估计

定理 4 设 $q\in L_1^1$，具有有界态 $-\beta_n^2<\cdots<-\beta_1^2$，规范常数 c_j, $j=1,2,\cdots,n$，和反射系数 R，则

(i) $$q(x)=\underset{a\to\infty}{CM}\frac{2i}{\pi}\int_{-a}^{a}kR(k)e^{2ikx}m^2(x,k)dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(2c_j\exp\{-2\beta_jx\})'m^2(x,i\beta_j)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}\int_0^b da\left(\frac{2i}{\pi}\int_{-a}^{a}kR(k)e^{2ikx}m^2(x,k)dk\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(2c_j\exp\{-i\beta_j x\})'m^2(x;i\beta_j)$$

其中,收敛是依 Césaro 平均意义下的几乎处处的收敛。

(ii) $$q(x)=F'(x)+2\int_0^\infty F'(x+t)B(x,t)dt$$

$$+\int_0^\infty F'(x+t)(B_x*B_x)(t)dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(2c_j\exp\{-2\beta_j x\})'\cdot m_1^2(x,i\beta_j)$$

$$=\Omega'(x)+2\int_0^\infty\Omega'(x+t)B(x,t)dt$$

$$+\int_0^\infty\Omega'(x+t)(B_x*B_x)(t)dt$$

$$\Omega(t)=F(t)+\sum_{j=1}^{n}2c_j\exp\{-2\beta_j t\}$$

(iii) 如 $kR(k)\in L^1$, 则

$$q(x)=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}kR(k)e^{2ikx}m^2(x,k)dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(2c_j\exp\{-2\beta_j x\})'\cdot m^2(x,i\beta_j)$$

定理 5 设 $q(x)\in L_1^1$, 且

$$\Omega(y)=F(y)+\sum_{j=1}^{n}2c_j\exp\{-2\beta_j y\}$$

则 $\Omega(y)$, $F(y)$ 为绝对连续函数，且有

$$|q(x)-\Omega'(x)|\leqslant K_1(x)\left(\int_x^\infty|q(t)|dt\right)^2$$

其中，$K_1(x)$ 为非增函数,且有

$$\int_a^\infty|F(t)|(1+|t|)dt\leqslant K_2(a)<\infty$$

$$\int_a^{\infty} |F(t)|\, dt \leqslant K_3(a) < \infty$$

定理 6 矩阵

$$\begin{pmatrix} T_1(k) & R_2(k) \\ R_1(k) & T_2(k) \end{pmatrix}, \quad -\infty < k < \infty$$

为实位势 $q(x) \in L_2^1$（没有有界态）的散射矩阵的充要条件为 T_1, T_2, R_1, R_2 满足以下条件

(i) （实性）$T_1(k) = T_2(k) = T(k)$

(ii) （U 性）

$$|T(k)|^2 + |R_1(k)|^2 = |T(k)|^2 + |R_2(k)|^2 = 1$$

$$R_1(k)\overline{T(k)} + \overline{R_2(k)}\, T(k) = 0$$

(iii) （解析性）$T(k)$ 在上半平面上解析，且连续到轴上.

(iv) （渐近性）$T(k) = 1 + o(1/|k|)$, $\mathrm{Im}k \geqslant 0$,

$$R_i(k) = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

k 为实的，$i = 1, 2$.

(v) （在 $k = 0$ 的估计）$|T(k)| > 0$, $\mathrm{Im}k \geqslant 0, k \neq 0$, 且有

(1) $0 < c < |T(k)|$，对一切 $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$，或者

(2) $T(k) = T(0)k + o(k)$, $T(0) \neq 0$, $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$,

$1 + R_i(k) = \rho_i k + o(k)$, $i = 1, 2$, k 为实的.

(vi) （实性）$T_i(k) = \overline{T_i(-k)}$, $R_j(k) = \overline{R_j(-k)}$, $j = 1, 2$.

(vii) $F_i(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_i(k) e^{2iky} dk$, $j = 1, 2$ 为绝对连续，且

$$\int_a^{\infty} |F_i'(t)|(1 + t^2)\, dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{a} |F_2'(t)|(1+t^2)dt \leqslant c(a) < \infty, -\infty < a < \infty$$

对于 KdV 方程，我们用散射反演法构造它的解，可以得到初始函数当 $|x| \to \infty$ 的衰减性和它对应的解的衰减率和光滑性.

对于 KdV 方程的初值问题

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u|_{t=0} = U(x)$$

我们设初始函数 $U(x)$ 满足

(i) $U(x) \in c^s(R),\ s > 3$

(ii) $U^{(s+1)}(x)$ 分片连续

(iii) $U^{(j)}(x) = o(|x|^{-N})$ 对某个 $N > 0, \forall_j \leqslant s+1$

我们由 Марченко 方程

$$B_\pm(x, y, t) \pm \int_0^{\pm\infty} \Omega_\pm(x+y+z, t) B_\pm(x, z, t)\, dz + \Omega_\pm(x+y, t) = 0 \tag{7.4}_\pm$$

求出 $B_\pm(x, y, t)$; 其中

$$\Omega_\pm(x, t) = F_\pm(x, t) + 2\sum_{j=0} c_j(t) e^{\pm 2\eta_j x}$$

$$F_\pm(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_\pm(\xi, t) = e^{\pm 2i\xi t} d\xi.$$

由此，令

$$u(x, t) = -B_+^{(1,0,0)}(x, 0, t) = B_-^{(1,0,0)}(x, 0, t)$$

即为 KdV 方程初值问题的解，其中

$$B^{(j,k,l)}(x, y, t) = \partial_x^j \partial_y^k \partial_t^l B = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l B.$$

我们求助于如下的 Фаддеев[8] 和 Агранович, Марченко[16] 的结果，籍以建立初值问题解的存在性和光滑性.

定理 7 (Агранович Марченко) 对固定的 x, t, 设条件

$$\pm\int_x^{+\infty}(1+|s|)|\Omega_\pm^{(1,0)}(s,t)|ds<\infty,\quad \forall x\in R \qquad (7.5)_\pm$$

之一满足，则相应的方程$(7.4)_+$或$(7.4)_-$具有一个解 $B_\pm(x, y, t)$，且有

$$\pm\int_x^{\infty}(1+|x|)|B_\pm^{(1,0,0)}(x,0,t)|dx<\infty,\quad \forall x\in R$$

定理 8 (Фаддеев) 对固定的 t，设满足

$$\pm\int_x^{+\infty}(1+s^2)|\Omega_\pm(s,t)|ds<\infty,\quad \forall x\in R \qquad (7.6)_\pm$$

且条件

如 $\lim\limits_{\xi\to 0}\xi a_+(\xi)\neq 0$，则$r_+(\xi)=-1+A\xi+o(\xi)$ $(7.7)_\pm$

$$t(\xi)=\alpha\xi+o(\xi),\quad \alpha\neq 0,\quad \xi\to 0$$

满足，所以$(7.4)_\pm$的解满足

$$-B_+^{(1,0,0)}(x,0,t)=B_-^{(1,0,0)}(x,0,t)$$

进一步，若函数 u 定义为

$$u(x,t)=-B_+^{(1,0,0)}(x,0,t)=B^{(1,0,0)}(x,0,t)$$

则具位势的 $u(x,t)$ 的 Schrödinger 方程

$$L_u\phi=\phi_{xx}+u(x,t)\phi=\zeta^2\phi$$

具有散射资料 (4.12)。

我们利用反射系数 $r_\pm(\xi)$ 关于初始函数 $U(x)$ 的积分表达式，可以检验定理 7，定理 8 中的所有条件均成立，由此我们得到 KdV 方程初值问题的解 $u(x,t)$，且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)|u(x,t)|dx<\infty,\quad \forall t\in R$$

我们有如下定理

定理 9 (a) 如 $j+3l\leqslant 2[N]-6-\mu$，则初值问题的解 $u(x,t)$ 存在，且 $u^{(j,l)}(x,t)$ 存在，对 $t\neq 0$，

(b) $u^{(j,0)}(x,t)\to U^{(j)}(x)$，$(t\to 0)$ $j=0, 1, 2$

(c) 对 $t>0$，

$$u^{(j,0)}(x, t) = \begin{cases} O\left(|x|^{\left[\frac{j}{2}\right]+3-[N]+\frac{\mu}{2}}\right), & x \to +\infty, \\ \quad j \leqslant 2[N] - 6 - \mu \\ O\left(|x|^{-\frac{1}{8}(4-j)-\delta}\right), & x \to -\infty, \quad j \leqslant 2 \end{cases}$$

(d) 对 $t < 0$

$$u^{(j,0)}(x, t) = \begin{cases} O\left(|x|^{-\frac{1}{8}(4-j)-\delta}\right), & x \to +\infty, \; j \leqslant 2 \\ O\left(|x|^{\left[\frac{j}{2}\right]+3-[N]+\frac{\mu}{2}}\right), & x \to -\infty, \\ \quad j \leqslant 2[N] - 6 - \mu \end{cases}$$

其中，$\delta = \frac{1}{16}$.

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{Jost 函数 } f_\pm(x, 0) \text{ 线性相关}, \\ 2, & \text{Jost 函数 } f_\pm(x, 0) \text{ 线性无关}, \end{cases} \quad \text{且 } N > 6 + \frac{\mu}{2}$$

从定理 9 可看出，如 $t < 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，u 很快衰减，但当 $x \to -\infty$ 时，则衰减较慢.

第八节　高阶和多维散射反演问题

在第三节中，我们仅考虑了二阶的散射反演问题．对此，我们可写成如下的矩阵形式

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$V_x = i\zeta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} V \tag{8.1}$$

$$V_t = QV, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

现考虑高阶散射反演问题：

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V_x = i\zeta DV + NV \\ V_t = QV \end{cases} \tag{8.3}$$

其中，$D = (d_i\delta_{ij})$，$N_{ii} = 0$，d_i 为常数．利用 $V_{xt} = V_{tx}$，及 $\zeta_t = 0$，我们有

$$Q_x = N_t + i\zeta(DQ - QD) + (NQ - QN) \tag{8.4}$$

或

$$Q_x = N_t + i\zeta[D, Q] + [N, Q] \tag{8.5}$$

我们寻求 Q，使之满足(8.5)，此时(8.3)的二个等式是相容的，因此我们可得到非线性进化方程．将 Q 展开成如下形式

$$Q = Q^{(1)}\zeta + Q^{(0)} \tag{8.6}$$

将上式代入 (8.5) 得

$$\begin{aligned} Q_x^{(1)}\zeta + Q_x^{(0)} = N_t + [N, Q^{(0)}] + i\zeta\{[D, Q^{(0)}] \\ + [N, Q^{(0)}]\} + i\zeta^2[D, Q^{(1)}] \end{aligned}$$

比较 ζ^2 的系数得

$$i[D, Q^{(1)}] = 0$$

或

$$\sum_k (D_{ik}Q_{kj}^{(1)} - Q_{ik}^{(1)}D_{kj}) = 0$$

由 $D_{ik} = \delta_{ik}d_i$，有

$$(d_i - d_j)Q_{ij}^{(1)} = 0$$

因此

$$Q_{ij}^{(1)} = q_i\delta_{ij} \tag{8.7}$$

取 q_i = const，比较 ζ 的系数得

$$Q_x^{(1)} = i[D, Q^{(0)}] + [N, Q^{(1)}]$$

因此

$$\begin{aligned} Q_{ijx}^{(1)} = i\sum_k (D_{ik}Q_{kj}^{(0)} - Q_{ik}^{(0)}D_{kj}) \\ + \sum_k (N_{ik}Q_{kj}^{(1)} - Q_{ik}^{(1)}N_{kj}) \end{aligned}$$

$$i(d_i - d_j)Q^{(0)}_{ij} + (q_j - q_i)N_{ij} = 0$$

或

$$Q^{(0)}_{ij} = \frac{q_i - q_j}{i(d_i - d_j)} N_{ij}\ (i \neq j) \tag{8.8}$$

当 $i = j$ 时,取 $Q^{(0)}_{ij} = 0$.

定义 设 $a_{ij} = \frac{1}{i}\frac{q_i - q_j}{d_i - d_j} = a_{ji}$, 我们有

$$Q^{(0)}_{ij} = a_{ij}N_{ij}\ (i \neq j) \tag{8.9}$$

比较 ζ^0 的系数,由 $Q^{(0)}_x = N_t + [N, Q^{(0)}]$, 得到

$$a_{ij}N_{ijx} = N_{ijt} + \sum_k (N_{ik}a_{kj}N_{kj} - a_{ik}N_{ik}N_{kj})$$

因此,得到 $N(N-1)$ 个进化方程

$$N_{ijt} = a_{ij}N_{ijx} + \sum_k (a_{ik} - a_{kj})N_{ik}N_{kj} \tag{8.10}$$

或

$$N_{ijt} = a_{ij}N_{ijx} + \sum_{k\neq i,j} (a_{ik} - a_{kj})N_{ik}N_{kj}$$

令 $N_{ij} = \sigma_{ij}N^*_{ji}(i > j)$, 如满足 $\sigma_{ik}\sigma_{kj} = -\sigma_{ij}\ (i > k > j)$, 且 a_{ij} 为实数,此时(8.10)与(8.10)*为相容,因而方程个数可减少. 事实上,

$$N^*_{jit} = a_{ji}N^*_{jix} + \sum_{k\neq i,j} (a_{ij} - a_{ki})N^*_{jk}N^*_{ki}$$

乘以 σ_{ij}, 利用 $a_{ij} = a_{ji}$, 得

$$N_{ijt} = a_{ij}N_{ijx} + \sum_{k\neq i,j} (a_{jk} - a_{ki})\sigma_{ik}N^*_{jk}N^*_{ki}$$

利用 $\sigma_{ij} = -\sigma_{ik}\sigma_{kj}$, 即得

$$N_{ijt} = a_{ij}N_{ijx} + \sum_{k\neq i,j} (a_{ik} - a_{kj})N_{ik}N_{kj}$$

而且还可改写为

$$N_{ijt}=a_{ij}N_{ijx}+\sum_{k>j>i}(a_{ik}-a_{kj})N_{ik}\sigma_{kj}N_{ik}^{*}$$

$$+\sum_{j>k>i}N_{ij}N_{ik}(a_{ik}-a_{kj})$$

$$+\sum_{j>i>k}\sigma_{ik}N_{ki}^{*}N_{kj}(a_{ik}-a_{kj})$$

例1 $n=3$

$$N=\begin{pmatrix}0 & N_{12} & N_{13}\\ \sigma_{21}N_{12}^{*} & 0 & N_{23}\\ \sigma_{31}N_{13}^{*} & \sigma_{32}N_{23}^{*} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A_1 & A_2\\ \sigma_{21}A_1^{*} & 0 & A_3\\ \sigma_{31}A_2^{*} & \sigma_{32}A_3^{*} & 0\end{pmatrix}$$

令 $a_{12}=V_1$，$a_{13}=V_2$，$a_{23}=V_3$，根据(8.10)有

$$\begin{cases}A_{1t}=V_1A_{1x}+\sigma_{32}(V_2-V_3)A_2A_3^{*}\\ A_{2t}=V_2A_{2x}+(V_1-V_3)A_1A_3\\ A_{3t}=V_3A_{3x}+\sigma_{21}(V_1-V_2)A_1^{*}A_2\end{cases}\tag{8.11}$$

其中，$-\sigma_{31}=\sigma_{21}\sigma_{32}$。(8.11)为三波方程。有时为方便计，引入 $A_1=ia_1u_1$，$A_2=-ia_2u_2$，$A_3=ia_3u_3$，且

$$a_1^2=\frac{q^2}{(V_1-V_3)(V_1-V_2)},\quad a_2^2=\frac{q^2}{(V_2-V_3)(V_1-V_2)}$$

$$a_3^2=\frac{a_1q}{(V_2-V_3)a_2}$$

则(8.10)为

$$\begin{cases}u_{1t}=V_1u_{1x}+\sigma_{32}iqu_2u_3^{*}\\ u_{2t}=V_2u_{2x}-iqu_1u_3\\ u_{3t}=V_3u_{3x}+\sigma_{21}iqu_1^{*}u_2\end{cases}\tag{8.12}$$

如果我们展开 Q 至 ζ^2 项，

$$Q=Q^{(2)}\zeta^2+Q^{(1)}\zeta+Q^{(0)}$$

将上式代入

$$Q_x = N_t + i\zeta[D, Q] + [N, Q]$$

可得

$$\beta_{ij}N_{ijxx} + \varepsilon_{ij}N_{ijx} - \sum_{k\neq i,j} \gamma_{ijk}(N_{ik}N_{kj})_x$$

$$= N_{ijt} + \sum_{k\neq i,j} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{ik}) \cdot N_{ik}N_{kj}$$

$$+ N_{ij}\Big\{2\beta_{ij}N_{ik}N_{kj} + \sum_{k\neq i,j} (\beta_{kj} + \gamma_{ikj})N_{ik}N_{kj}$$

$$- (\beta_{ki} + \gamma_{kji}) \cdot N_{ik}N_{ki}\Big\} + \sum_{k\neq i,j} (\beta_{kj}N_{ik}N_{kjx}$$

$$- \beta_{ik}N_{kj}N_{ikx}) + \sum_{k\neq i,j} \sum_{m\neq i,j} (\gamma_{ikm}N_{kj}N_{im}N_{mk}$$

$$- \gamma_{kjm}N_{ik}N_{km}N_{mj}) \tag{8.13}$$

其中

$$a_{ij} = \frac{q_i^{(2)} - q_j^{(2)}}{i(d_i - d_j)} = a_{ji}$$

$$\beta_{ij} = \frac{d_{ij}}{i(d_i - d_j)} = -\beta_{ji}$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{a_{kj} - a_{ik}}{i(d_i - d_j)} = \gamma_{jik} = \gamma_{kji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{q_i^{(1)} - q_j^{(1)}}{i(d_i - d_j)} = \varepsilon_{ji}$$

事实上，比较 $\zeta^3, \zeta^2, \zeta^1, \zeta^0$ 的系数得

$$i[D, Q^{(2)}] = 0,\quad Q_x^{(1)} = [iD, Q^{(0)}] + [N, Q^{(1)}]$$
$$Q_x^{(2)} = i[D, Q^{(1)}] + [N, Q^{(2)}]$$
$$Q_x^{(0)} = N_t + [N, Q^{(0)}],\quad Q_{ik}^{(2)} = q_i^{(2)}\delta_{ik},\quad D_{ik} = d_i\delta_{ik}$$

由 $Q_x^{(2)} = i[D, Q^{(1)}] + [N, Q^{(2)}]$，即

$$i\sum_k (D_{ik}Q_{kj}^{(1)} - Q_{ik}^{(1)}D_{kj}) + \sum_k (N_{ik}Q_{kj}^{(2)} - Q_{ik}^{(2)}N_{kj}) = 0$$

于是有

$$Q_{ij}^{(1)} = \frac{q_i^{(2)} - q_j^{(2)}}{i(d_i - d_j)} N_{ij} = a_{ij}N_{ij}$$

由

$$Q_x^{(1)} = i[D, Q^{(0)}] + [N, Q^{(1)}]$$

$$a_{ij}N_{ijx} = i(d_i - d_j)Q_{ij}^{(0)} + \sum_{k\neq i,j} (a_{kj} - a_{ik})N_{ik}N_{kj} + (Q_{ii}^{(1)} - Q_{jj}^{(1)})N_{ij}$$

于是有

$$Q_{ij}^{(0)} = \frac{a_{ij}}{i(d_i - d_j)} N_{ijx} + \sum_{k\neq i,j} \frac{(a_{ik} - a_{kj})}{i(d_i - d_j)} N_{ik}N_{kj} - \frac{Q_{ii}^{(1)} - Q_{jj}^{(1)}}{i(d_i - d_j)}$$

$$N_{ij} = \beta_{ij}N_{ijx} - \sum_{k\neq i,j} \gamma_{ijk}N_{ik}N_{kj} + \varepsilon_{ij}N_{ij}'$$

代入 $Q_x^{(0)} = N_t + [N, Q^{(0)}]$，即得(8.13)。

例2　$n = 3$,取

$$N = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & A_2 \\ \sigma_{21}A_1^* & 0 & 0 \\ \sigma_{31}A_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和 $\varepsilon_{ij} = 0$，即有

$$\begin{cases} iA_{1t} = A_{1xx} + 2A_1(\sigma_{21}|A_1|^2 + \sigma_{31}|A_2|^2) \\ iA_{2t} = A_{2xx} + 2A_2(\sigma_{21}|A_1|^2 + \sigma_{31}|A_2|^2) \end{cases} \tag{8.14}$$

对于 Boussinesg 方程

$$W_{tt} - W_{xx} - 6(W^2)_{xx} + W_{xxxx} = 0 \tag{8.15}$$

它对应于取

$$N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ N_{21} & 0 & (1+W_3)N_{31}\\ N_{31} & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{8.16}$$

的情况，其中，$W_3=e^{-2\pi i/3}$. 此时它的特征值问题为

$$\Psi_{xxx}+(\lambda+Q_1)\Psi+Q_2\Psi_x=0 \tag{8.17}$$

其中，$Q_1=N_{31x}+N_{21}$，$Q_2=(2+W_3)N_{31}$。

例 3 如果取

$$N=\begin{pmatrix}0 & A & iB\\ 0 & 0 & A^*\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.18}$$

则可得到方程组

$$\begin{cases}iA_t+\lambda A_{xx}=AB\\ B_t=-\alpha(|A|^2)_x\end{cases} \tag{8.19}$$

此问题出现于浅水中长重力波和短毛细波的相互作用.

以下考虑高维的散射反演问题. 在这里，我们仅考虑含参数 y 的情况. 此时特征值问题为

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,t)=i\zeta d(y)v(x,y,t)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}N(x,y,z;t)v(x,z,t)dz \tag{8.20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x,y,z;t)v(x,y,z;t)dz \tag{8.21}$$

由 $v_{xt}=v_{tx}$ 及 $\zeta_t=0$，可得

$$Q_x(x,y,z;t)=N_t(x,y,z;t)+i(d(y)-d(z))$$

$$\cdot Q(x,y,z;t)+\int_{-\infty}^{\infty}[Q(x,z',z;t)N(x,y,z';t)$$

$$-N(x,z',z;t)Q(x,y,z';t)]dz' \tag{8.22}$$

依 ζ 展开，$Q=Q^{(1)}+\zeta Q^{(0)}$，可得积分微分方程

$$N_t(x,y,z;t)=\alpha(y,z)N_x(x,y,z;t)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(y, z')-\alpha(y, z)]N(x, y, z'; t)$$

$$\cdot N(x, z', z; t)dz' \tag{8.23}$$

其中，$\alpha(y, z)=[c(z)-c(y)]/i[d(z)-d(y)]=\alpha(z, y)$. 当 σ 满足 $\sigma(y, z')\sigma(z', z)=-\sigma(y, z)$, $y>z'>z$ 时,则对称条件 $N(x,y,z;t)=\sigma(y, z)N^*(x, z, y; t)$ $(y>z)$ 是满足的. 我们现在考虑二维情况.

$$\begin{cases} V_x=i\zeta DV+NV+BV_y, \\ V_t=QV+CV_y \end{cases} \tag{8.24}$$

设 $\zeta_t=0$, 且 B, D, C 均为常数,我们有

$$V_{xt}=i\zeta D[QV+CV_y]+N_tV+N(QV+CV_y)$$
$$+B(Q_yV+QV_y+CV_{yy})$$
$$V_{tx}=Q_xV+Q[i\zeta DV+NV+BV_y]$$
$$+C[i\zeta DV_y+N_yV+NV_y+BV_{yy}]$$

利用 $V_{xt}=V_{tx}$, 并使 V, V_y, V_{yy} 的系数相等,得

$$V_{yy}: [C, B]=0 \tag{8.25}$$

$$V_y: i\zeta[C, D]+[Q, B]+[C, N]=0 \tag{8.26}$$

$$V: i\zeta[Q, D]+[Q, N]+Q_x+CN_y-BQ_y=N_t \tag{8.27}$$

下面我们考虑最简单的情况:

$$C=c_i\delta_{ij}, \ B=b_i\delta_{ij}, \ D=d_i\delta_{ij}, \ N_{ii}=0$$

其中, a_i, b_i, d_i 为常数,则由(8.25)有

$$\sum_k (C_{ik}B_{kj}-B_{ik}C_{kj})=0=c_ib_i-c_ib_i$$

由(8.26)有

$$i\zeta[C, D]+\sum_k (Q_{ik}B_{kj}-B_{ik}Q_{kj})$$

$$+\sum_k (c_{ik}N_{kj}-N_{ik}c_{kj})=0$$

由此

$$Q_{ij}=\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}N_{ij}(i\neq j),\quad Q_{ii}=q_i\ （取 q_i 为常数）$$

我们定义

$$a_{ij}=\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}=a_{ji}$$

则有

$$Q_{ij}=a_{ij}N_{ij}\ \ (i\neq j)$$

由(8.27)有

$$i\zeta\sum_k(Q_{ik}D_{kj}-D_{ik}Q_{kj})+\sum(Q_{ik}N_{kj}-N_{ik}Q_{kj})$$
$$+Q_{ij,x}+\sum(C_{ik}N_{kj,y}-B_{ik}Q_{kj,y})=N_{ij,t}\qquad(8.28)$$

对 $i\neq j$ 有

$$i\zeta[a_{ij}N_{ij}(d_j-d_i)]+(q_i-q_j)N_{ij}+\sum_{k\neq i,j}(a_{ik}-a_{kj})N_{ik}N_{kj}$$
$$+a_{ij}N_{ij,x}+c_jN_{ij,x}-b_ja_{ij}N_{ij,y}=N_{ij,t}\qquad(8.29)$$

当 $i=j$ 时，方程自然满足。我们注意到(8.29)中含有 ζ，故选取 $q_i=q_i(\zeta)$。因 q_i 是未定的，特别取

$$q_i-q_j=i\zeta a_{ij}(d_i-d_j),$$

由(8.29)可得

$$N_{ij,t}=a_{ij}N_{ij,x}+\beta_{ij}N_{ij,y}+\sum_{k\neq i,j}(a_{ik}-a_{kj})N_{ik}N_{kj}\quad(8.30)$$

其中

$$\beta_{ij}=c_i-b_ia_{ij}=\frac{b_jc_i-c_jb_i}{b_i-b_j}\ （y 方向群速度）$$

$$a_{ij}=\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}\ （x 方向群速度）$$

如 $\sigma_{ij}=-\sigma_{ik}\sigma_{kj}\ (i>k>j)$，则 $N_{ij}=\sigma_{ij}N_{ji}^*$ 为相容的，其中，a_{ij}，β_{ij} 为实的。

例 4 三波方程，$n=3$，取 $N_{12}=A_1$，$N_{13}=A_2$，$N_{23}=A_3$，我们有

$$\begin{cases} A_{1t}=a_{12}A_{1x}+\beta_{12}A_{1y}+\sigma_{31}(a_{13}-a_{23})A_2A_3^* \\ A_{2t}=a_{13}A_{2x}+\beta_{13}A_{2y}+(a_{12}-a_{23})A_1A_3 \\ A_{3t}=a_{23}A_{3x}+\beta_{23}A_{3y}+\sigma_{21}(a_{12}-a_{23})A_1^*A_3 \end{cases} \tag{8.31}$$

如果在(8.24)中，V 对时间的依赖选为

$$V_t=QV+c_1V_y+c_2V_{yy} \tag{8.32}$$

且设 B，c_1，c_2 均为对角常数矩阵，则对

$$N=\begin{pmatrix} 0 & A \\ \pm A^* & 0 \end{pmatrix} \tag{8.33}$$

有进化方程组

$$\begin{cases} iA_t+A_{xx}+A_{yy}+(Q_1-Q_2)A=0 \\ Q_{1x}+k_1Q_{1y}=\mp[(AA^*)_x-k_1(AA^*)_y] \\ Q_{2x}+k_2Q_{2y}=\pm[(AA^*)_x-k_2(AA^*)_y] \end{cases} \tag{8.34}$$

其中

$$k_1=\frac{ib_1}{\sqrt{b_1b_2}},\quad k_2=\frac{ib_2}{\sqrt{b_1b_2}}$$

如果与 y 无关，则(8.34)为

$$iA_t+A_{xx}\mp 2A^2A^*=0$$

(类似地，如果与 x 无关，则有 $iA_t+A_{yy}\pm 2A^2A^*=0$)，即得到普通的非线性 Schrödinger 方程．无论如何，(8.34) 则为高维的非线性 Schrödinger 方程

$$iA_t+\nabla_x^2A+kA^2A^*=0$$

对于另一种形式的进化方程

$$\begin{cases} A_t=D_1A+WA \\ D_0W=\pm 2D_1|A|^2 \end{cases} \tag{8.35}$$

其中

$$D_1 = \frac{(e_1 - e_2)\partial_x^2 + 2(b_1e_2 - e_1b_2)\partial_{xy} + (e_1b_2^2 - b_1^2e_2)\partial_y^2}{(b_2 - b_1)^2}$$

$$D_0 = -\partial_x^2 + (b_1 + b_2)\partial_{xy} - b_1b_2\partial_y^2$$

如取 $W = C|A|^2 + \hat{W}$，$C = -2(e_1 - e_2)/(b_1 - b_2)$，$e_1 = -e_2$，$b_1 = -b_2$，$e_1 = 2i$，$\hat{W} = -2iQ$，我们有

$$\begin{cases} iA_t = \left(\frac{1}{b_1^2} A_{xx} + A_{yy}\right) + 2QA \mp \frac{2}{b_1^2} |A|^2 A^* \\ Q_{xx} - b_1^2 Q_{yy} = \mp 2(|A|^2)_{yy} \end{cases} \tag{8.36}$$

(8.36) 对于 b_1 为实数或为纯虚数，均有物理意义。

对于二维 KdV 方程

$$u_{xt} + 6(uu_x)_x + u_{xxxx} + 3b^2u_{yy} = 0 \tag{8.37}$$

它对应的特征值问题为

$$v_{xx} + (\lambda + u)v + bv_{yy} = 0 \tag{8.38}$$

可从我们的方程取

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

得到。

关于考虑特征值 λ 与时间 t 有关的散射反演方法，李翊神等进行了一系列的研究工作，可参见[17—19]。

参 考 文 献

[1] C. S. Gardner, I. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Lett.*, **19** (1967), 1095—1097.

[2] D. D. Lax, *Comm. Pure. Appl. Math.*, Vol. **21** (1968), 467—490.

[3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys——JEFP*, Vol. **34** (1972), 62—69.

[4] M. J. Abolowitz, P. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 219—315.

[5] R. M. Miura, *SIAM Rev.*, Vol. 18(1976), 412—459.

[6] M. J. Abolowitz, *Stud. Appl. Math.*, **58** (1978), 17—94.

[7] F. Calogero, A. Degasperis, *Nuovo Cimento*, **201** (1976), **32B**;

Lett. Nuovo Cimento., **16** (1976), 181.

[8] L. D. Faddeev, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **73** (1964), 314—333.

[9] S. Tanaka, *Osaka*, **11** (1974), 49—59.

[10] V. E. Zakharov and L. D. Faddeev, *Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), 18—27.

[11] A. Cohen, *Arch. Nat. Anal.*, **71** (1974), 113.

[12] P. Deiff, E. Trubowitz, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **32** (1979), 121.

[13] H. C. Morris and K. K. Dodd, *Phys. Script.*, **20** (1979).

[14] Yan-Chow Ma, *Stud. Appl. Math.*, **59** (1978), 201—221.

[15] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **55** (1976), 9—44.

[16] Z. S. Agranovich, V. A. Marchenko, The Inverse Problem of Scattering Theory (translated from Russian by B. D. Secklsr), New York, Gordon and Breach, 1963.

[17] 李翊神，中国科学 A 辑，1982，第五期，385—390.

[18] 李翊神、庄大蔚，数学学报，第二十五卷，第四期，1982，464—474.

[19] Li Yi-Shen, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations Vol. 3, 1297, Science Press, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.

第三章　孤立子的相互作用和它的渐近性质

第一节　孤立子的相互作用和 $t\to\infty$ 的渐近性质

孤立子在非线性相互作用后，不改变它原来的振幅和波形，首先为 Kruskal Zabusky[1] 在数值计算中发现. 后来，P. D.Lax[2] 从理论上给予严格的分析证明. Lax 还细致地分析了二个孤立子非线性相互作用的详细过程，指出：

(i) 若波速 $c_1\gg c_2$，第一个波高于(因而也快于)第二个波，若第一个波位于第二个波的左方，则第一个波一定赶上第二个波. 在相互作用时大的波首先吞并小的(第二个)波，然后再吐出它，此时只有一个最大值(峰值).

(ii) 若波速 $c_1\approx c_2$，此时大的波赶上小的波，相互作用时大的波峰值下降，小的波峰值上升，存在二个峰值，然后再交换一下这种过程. Lax 还分析了 KdV 方程 $t\to\infty$ 解的性态. 他指出：若 $u(x,t)$ 为 KdV 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.1}$$

的解，它对一切 x, t 定义，且在 $x=\pm\infty$ 处消失，则存在离散的正数 c_1, c_2, $\cdots$, c_N (称它为 u 的特征速度) 和相位移 $\theta_j^\pm$，使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} u(x+ct,\ t)=\begin{cases} s(\xi-\theta_j^\pm,\ c_j), & c=c_j \\ 0, & c\neq c_j \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，s 表示(1.1)的孤立子解，$\xi=x-c_jt$

$c_1\gg c_2$ 相互作用示意图如图 3-1 所示.

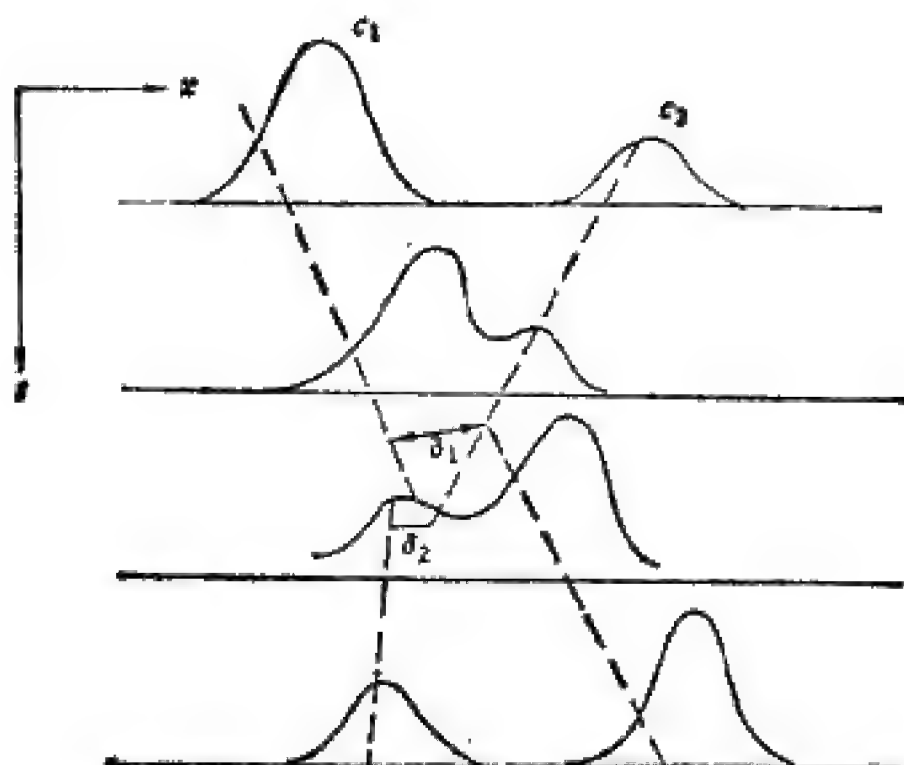


图 3-1

以下我们利用反散射法求解N个孤立子所得到的结果，用代数分析手段证明 Lax 的理论：如果 $t\to-\infty$ 有N个具特征值 $k_1, k_1, \cdots, k_N$ 的孤立子，则当 $t\to\infty$ 时 KdV 方程的解再由这N个特征值的孤立子所组成，只是它们的位相有了平移.

由第二章(2.19)有

$$K(x, y, t) = -\sum_{m=1}^{N} c_m\psi_m e^{-k_m y}$$

$$u = -2\frac{d}{dx}K(x, x; t) = 2\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{N} c_m\psi_m e^{-k_m x}$$

$$= 2\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{N} f_m(x) = 2\sum_{m=1}^{N} f'_m(x)$$

其中

$$f_m(x) = c_m\psi_m e^{-k_m x}$$

为了计算 $\sum_m f'_m(t\to\pm\infty)$，需要决定 f_m，为此改写

$$\psi_m(x) + \sum_{n=1}^{N} c_m c_n \frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{(k_m + k_n)} \psi_n = c_m e^{-k_m x} \quad (1.3)$$

为

$$c_m^{-2} e^{2k_m x} f_m(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n(x)}{k_m + k_n} = 1 \ (m = 1, 2, \cdots, N) \quad (1.4)$$

对 x 求导得:

$$c_m^{-2} e^{2k_m x} f'_m(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{f'_n(x)}{k_m + k_n} = -2k_m c_m^{-2} e^{2k_m x} f_m \quad (1.5)$$

为了考虑 $|t| \to \infty$ 的渐近状态,取运动坐标系

$$\xi \equiv x - 4k_p^2 t, \ p = 1, 2, \cdots, N \quad (1.6)$$

其中,$\lambda_p = -k_p^2$ 为第 p 个孤立子的特征值,$4k_p^2$ 为它的运动速度,$2k_p^2$ 为它的振幅. 于是有

$$c_m^{-2} e^{2k_m x} = c_m(0)^{-2} \exp\{-8k_m(k_m^2 - k_p^2)t + 2k_m \xi\}$$
$$\equiv c_m(\xi) \exp\{-8k_m(k_m^2 - k_p^2)t\}$$

其中,$c_m(\xi) = c_m(0)^{-2} e^{2k_m \xi}$, 于是(1.4), (1.5)可改写为

$$c_m(\xi) e^{-8k_m(k_m^2 - k_p^2)t} f_m + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{k_m + k_n} = 1 \quad (1.7)$$

$$c_m(\xi) e^{-8k_m(k_m^2 - k_p^2)t} f'_m + \sum_{n=1}^{N} \frac{f'_n}{k_m + k_n}$$
$$= -2k_m c_m(\xi) e^{-8k_m(k_m^2 - k_p^2)t} f_m \quad (1.8)$$

设 $k_1 > k_2 \cdots > k_N > 0$, 考察

1) $t \to \infty$ 的渐近状态

对(1.7)取极限, 可得

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{k_m + k_n} = 1, & m = 1, 2, \cdots p - 1 \\ c_p f_p + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{k_p + k_n} = 1, & m = p \\ f_m = 0, & m = p + 1, \cdots N \end{cases}$$

上式可简单写为

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{f_n}{k_m + k_n} = 1 - c_p \delta_{mp} f_p \quad (m = 1, 2, \cdots, p) \quad (1.9)$$

类似有

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{f'_n}{k_m + k_n} = -c_p \delta_{mp}(2k_p f_p + f'_p) \quad (m = 1, 2, \cdots, p) \quad (1.10)$$

$$f'_m - 2k_m f_m = 0 \quad (m = p+1, \cdots, N) \quad (1.11)$$

矩阵 $K_p = \left(\frac{1}{k_m + k_n}\right)$ $(m = 1, 2, \cdots, p)$ 易知它具有正的行列式. 事实上

$$0 < \det C = \det\left(c_m c_n \frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m + k_n}\right)$$

$$= \det\left(\frac{1}{k_m + k_n}\right) \prod_{m=1}^{N} c_m^2 e^{-2\sum_{m=1}^{N} k_m x}$$

故有 $\det\left(\frac{1}{k_m + k_n}\right) > 0$, 由 Gramer 法则,由(1.9), (1.10)可解 f_m, f'_m.

$$f_m \det K_p = \sum_{n=1}^{p} K_{mn} - c_p K_{pm} f_p \quad (m=1,2,\cdots,p) \quad (1.12)$$

$$f'_m \det K_p = -c_p K_{pm}(2k_p f_p - f'_p) \quad (m=1, 2, \cdots, p) \quad (1.13)$$

其中, K_{mn} 为矩阵 $\left(\frac{1}{k_m + k_n}\right)$ 元的代数余子式. 我们用 L_p 表示 K_p 最后一行的元素都为 1 的矩阵. 令 $m = p$ 解出 f_p, f'_p 得

$$f_p = \frac{\det L_p}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}$$

$$f'_p = -\frac{2c_p k_p f_p \det K_{p-1}}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}$$

对(1.13)求和，并将 f_p, f'_p 的上述表达式代入得

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{p} f'_m \det K_p &= -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm}(2k_p f_p - f'_p) \\
&= -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm} 2k_p f_p \left(1-\frac{c_p \det K_{p-1}}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}\right) \\
&= -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm} f_p 2k_p \frac{\det K_p}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}} \\
&= -c_p \det L_p f_p 2k_p \frac{\det K_p}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}} \\
&= -2k_p c_p (\det L_p)^2 \frac{\det K_p}{(\det K_p + c_p \det K_{p-1})^2}
\end{aligned}
$$

故有

$$
\lim_{\substack{t\to\infty \\ \xi\text{固定}}} \sum_{m=1}^{p} f'_m = -\frac{2k_p c_p}{\left[\dfrac{\det K_p}{\det L_p} + c_p \dfrac{\det K_{p-1}}{\det L_p}\right]^2}
$$

从 K_p 中的各行减去最后一行，易得

$$
\det K_p = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p}(k_p + k_m)} \det L_p
$$

同理，从 L_p 中的各行减去最后一列，有

$$
\det L_p = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p + k_m)} \det K_{p-1}
$$

$$
\frac{\det K_p}{\det L_p} = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p}(k_p + k_m)}
$$

对(1.13)求和，并将 f_p, f'_p 的上述表达式代入得

$$\sum_{m=1}^{p} f'_m \det K_p = -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm}(2k_p f_p - f'_p)$$

$$= -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm} 2k_p f_p \left(1 - \frac{c_p \det K_{p-1}}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}\right)$$

$$= -\sum_{m=1}^{p} c_p K_{pm} f_p 2k_p \frac{\det K_p}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}$$

$$= -c_p \det L_p f_p 2k_p \frac{\det K_p}{\det K_p + c_p \det K_{p-1}}$$

$$= -2k_p c_p (\det L_p)^2 \frac{\det K_p}{(\det K_p + c_p \det K_{p-1})^2}$$

故有

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ \xi\text{固定}}} \sum_{m=1}^{p} f'_m = -\frac{2k_p c_p}{\left[\frac{\det K_p}{\det L_p} + c_p \frac{\det K_{p-1}}{\det L_p}\right]^2}$$

从 K_p 中的各行减去最后一行，易得

$$\det K_p = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p}(k_p + k_m)} \det L_p$$

同理，从 L_p 中的各行减去最后一列，有

$$\det L_p = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p + k_m)} \det K_{p-1}$$

$$\frac{\det K_p}{\det L_p} = \frac{\prod_{m=1}^{p-1}(k_p - k_m)}{\prod_{m=1}^{p}(k_p + k_m)}$$

$4k_p^2$ 的孤立子.

2) $t\to-\infty$ 的渐近状态

由(1.7),(1.8)有

$$\sum_{m=p}^{N}\frac{f_n}{k_m+k_n}=1-c_p\delta_{mp}f_p\ (m=p,\cdots,N)$$

$$\sum_{m=p}^{N}\frac{f_n'}{k_m+k_n}=-c_p\delta_{mp}(2k_pf_p+f_p')\ (m=p,\cdots,N)$$

$$f_m'=-2k_mf_m=0,\ m=1,2,\cdots,p-1$$

如同 $t\to\infty$ 的讨论一样,定义 ξ_p 为

$$\xi_pe^{2k_p\xi_p}=\frac{c_p^2(0)}{2k_p}\prod_{m=p+1}^{N}\left(\frac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)^2$$

于是可得

$$\lim_{t\to-\infty}u(x,t)=-2k_p^2\operatorname{sech}^2[k_p(x-4k_p^2t-\xi_p)]$$

位相差

$$\xi_p-\xi_p=\frac{1}{k_p}\left[\sum_{m=1}^{p-1}\log\left(\frac{k_m-k_p}{k_m+k_p}\right)-\sum_{m=p+1}^{N}\log\left(\frac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)\right].$$

我们也可用另外的办法来分析有限个孤立子的相互作用. 设 KdV 方程为

$$u_t+\delta uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.14}$$

令 $u=p_x$, 则 $(p_t)_x+\delta\left(\frac{1}{2}p_x^2\right)_x+(p_{xxx})_x=0$ 积分之,得

$$p_t+\frac{1}{2}\delta p_x^2+p_{xxx}=0 \tag{1.15}$$

作类似于 Hopf-Cole 的变换, $\delta p=12(\log F)_x$,代入上式,消去一些项再合并为

$$F(F_t+F_{xxx})_x-F_x(F_t+F_{xxx})+3(F_{xx}^2-F_xF_{xxx})=0 \tag{1.16}$$

注意到在 (1.16) 中含有算子 $L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}$，而 $F = 1 + e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3 t}$ (α，s 为实数) 为 $F_t + F_{xxx} = 0$ 的特解，如 (1.16) 为线性的，可以指望对 α，s 叠加求和产生它的解，现由于(1.16)的非线性，具有相互作用项，我们可用通常的办法依相互作用项近似展开：

$$F = 1 + F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots$$

代入(1.16)可得一系列方程：

$$\{F_t^{(1)} + F_{xxx}^{(1)}\}_x = 0$$

$$\{F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)}\}_x = -3\{F_{xx}^{(1)} - F_x^{(1)} F_{xxx}^{(1)}\}$$

$$\cdots\cdots$$

如果 $F^{(1)}$ 只取二项： $F^{(1)} = f_1 + f_2$，$f_j = e^{-\alpha_j(x-s_j)+\alpha_j^3 t}$ ($j = 1, 2$) 显然这样选取的 $F^{(1)}$ 满足第一个方程，将它代入 $F^{(2)}$ 的方程得

$$\{F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)}\}_x = 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 \cdot f_2$$

可解出

$$F^{(2)} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 \cdot f_2$$

使人感到惊奇的是，$F^{(3)} = F^{(4)} = \cdots = 0$，于是我们得到 (1.16) 的精确解为：

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 \cdot f_2 \tag{1.17}$$

我们注意到在此表达式中相互作用项仅含有 $f_1 f_2$，而没有 f_1^2, f_2^2 项. 这个结果可推广到 N 个 f_j 上. 设 $F^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} f_j$，则 $F^{(2)}$ 含有 $f_j f_k$ 项，($j \neq k$)，而没有 f_j^2 项. $F^{(3)}$ 含有 $f_j f_k f_l$ ($j \neq k \neq l$)，而没有 $f_j^3, f_j^2 f_k$ 项等等，$F^{(N)} \propto f_1, f_2, \cdots, f_N$，于是

$$F = 1 + \sum_j f_j + \sum_{j \neq k} a_{jk} f_j f_k + \sum_{j \neq k \neq l} a_{jkl} f_j f_k f_l + \cdots$$

$$+ a_{1,2,\cdots,N} f_1 f_2 \cdots f_N$$

可以证明，$F = \det|F_{mn}|$，其中，$F_{mn} = \delta_{mn} + \dfrac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} f_m$.

矩阵 (F_{mn}) 和由上述反散射法求得的 $C = \left(\delta_{mn} + \dfrac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m + k_n}\right)$ 是一致的，现考虑 $N = 2$，由 $\delta u = \delta p_x = 12(\log F)_{xx}$ 及 F 的表达式(1.17)，可得 KdV 方程(1.14)解的表达式

$$\frac{\delta u}{12} = \{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2 + [(\alpha_2 - \alpha_1)/ \cdot (\alpha_2 + \alpha_1)]^2(\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)\}/\{[1 + f_1 + f_2 + ((\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1))^2 f_1 f_2]^2\} \tag{1.18}$$

$$f_i = \exp[-\alpha_i(x - s_i) + \alpha_i^3 t]$$

我们考虑一个孤立子解，$\delta u = 3\alpha^2 \text{sech}^2 \dfrac{\theta - \theta_0}{2}$，其中，$\theta = \alpha x - \alpha^3 t$，$\theta_0 = s\alpha$，它可用 $f = e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3 t}$ 来表示。

$$\frac{\delta u}{12} = \frac{\alpha^2 f}{(1 + f)^2}$$

当 $f = 1$ 时，δu 取极大值，最大振幅为 $\delta u = 3\alpha^2$；取极大值的位置为 $-\alpha(x - s) + \alpha^3 t = 0$，即 $x = s + \alpha^2 t$，波速 $c = \alpha^2$. 为了考察它们的相互作用和 $t \to \pm\infty$ 的渐近状态，充分利用解的表达式(1.18)，下面我们分几种情况讨论：

1. 在 (x, t) 区域上，$f_1 \approx 1$，f_2 很大或很小。

(1) $f_1 \approx 1$，$f_2 \ll 1$，从(1.18)可知

$$\frac{\delta u}{12} \approx \frac{\alpha_1^2 f_1}{(1 + f_1)^2}$$ 即为孤立子 α_1 波

(2) $f_1 \approx 1$，$f_2 \gg 1$. 从(1.18)可知

$$\frac{\delta u}{12} \approx \frac{[(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)]^2 \alpha_1^2 f_1 f_2^2}{(f_2 + [(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)]^2 f_1 f_2)^2} = \frac{\alpha_1^2 \tilde{f}_1}{(1 + \tilde{f}_1)^2},$$

$$\bar{f} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 f_1$$

此时仍为孤立子 α_1 波，仅相位 s_1 换为

$$\bar{s}_1 = s_1 - \frac{1}{\alpha_1}\log\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2$$

2. 在 (x, t) 区域上，$f_2 \approx 1$，f_1 很大或很小，类似 1 的分析，此时为孤立子 α_2 波.

3. f_1，f_2 均很小或很大，此时 $\delta u \approx 0$。

4. $f_1 \approx 1$，$f_2 \approx 1$，表示相互作用区.

现设 $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$，α_2 波追赶 α_1 波的情况.

当 $t \to -\infty$

α_1 波：　$f_1 \approx 1$，$x = s_1 + \alpha_1^2 t$，

$$f_2 = e^{-\alpha_2(x-s_2)+\alpha_2^3 t} = e^{-\alpha_2[x-s_2]-\alpha_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)t} \ll 1$$
$$(t \to -\infty)$$

依前面的讨论，此时表明在 $x = s_1 + \alpha_1^2 t$ 处为孤立子 α_1 波.

α_2 波：　$f_2 \approx 1$，$x = s_2 - \dfrac{1}{\alpha_2}\log\left(\dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^2 t$

此时 $f_2 \gg 1$，$(t \to -\infty)$ 表明在

$$x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2}\log\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^2 t$$

为孤立子 α_2 波. 其余地方 $\delta u \approx 0$ ($f_1 f_2$ 很大或很小)

当 $t \to \infty$ 时，有

α_1 波：　$x = s_1 - \dfrac{1}{\alpha_1}\log\left(\dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_1^2 t$，$f_1 \approx 1$，$f_2 \gg 1$

α_2 波：　$x = s_2 + \alpha_2^2 t$，$f_2 \approx 1$，$f_1 \ll 1$

其余处：$\delta u \approx 0$

上述结果表明：　孤立子不改变原来的参量 α_1，α_2，快波 α_2 位于前头. 碰撞相互作用过程仅使

α_2 波向前平移 $\frac{1}{\alpha_2}\log\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$

α_1 波向后平移 $\frac{1}{\alpha_1}\log\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$

在 $f_1\approx 1$，$f_2\approx 1$ 相互作用的时间、地点约为

$$x=s_1+\alpha_1^2t=s_2+\alpha_2^2t,\quad t=\frac{-(s_2-s_1)}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}$$

$$x=\frac{\alpha_2^2s_1-\alpha_1^2s_2}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}$$

第二节　弱色散作用时 KdV 方程解的行态和 WKB 方法

我们知道，Burgers 方程 $u_t+uu_x=\varepsilon u_{xx}$ $(\varepsilon>0)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u_\varepsilon\to u$，其中 u 为方程

$$u_t+uu_x=0$$

的广义解。

对于 KdV 方程

$$u_t+uu_x=\varepsilon u_{xxx}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u_\varepsilon(x,t)\to u(x,t)$? 且 $u(x,t)$ 是否为 $u_t+uu_x=0$ 的广义解？ 这个问题是我们很关心的问题． 对于 KdV 方程，在一般情况下，回答是否定的，即 KdV 方程的解当 $\varepsilon\to 0$ 不趋于任何含击波的间断解． 我们先粗略地分析一下这个问题，然后再加以说明．

对 KdV 方程

$$u_t+uu_x=\varepsilon u_{xxx}\tag{2.1}$$

的解 u_ε，若 u_ε 及其一些导数趋于 $0(|x|\to\infty)$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_\varepsilon(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=M_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u_\varepsilon^2(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u^2(x,0)dx=E$$

现对 $u_t+uu_x=0$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上对 x 积分,对 t 微分和积分次序交换,注意一下在间断线 $x=x(t)$ 上有跳跃,有

$$\frac{dM}{dt}+D[u]=\frac{1}{2}[u^2]$$

其中,$D=\frac{dx(t)}{dt}$, $[f]=f_+-f_-=f(x(t)+0)-f(x(t)-0)$, $x(t)$ 为间断线, $M=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx$. 由于动量守恒, $\frac{dM}{dt}=0$,我们得到冲击波关系式

$$D=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\frac{[u^2]}{[u]}$$

即 Hugoniot 条件. 将 u 乘以 $u_t+uu_x=0$ 并对 x 积分,即得

$$\frac{dE}{dt}+D\left[\frac{1}{2}u^2\right]=\frac{1}{3}[u^3],\ E=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u^2(x,t)dx$$

将 $D=\frac{1}{2}\frac{[u^2]}{[u]}$ 代入上式,得 $\frac{dE}{dt}=\frac{1}{12}[u]^3$. 由熵条件 $u_->u_+$, 故有 $\frac{dE}{dt}<0$. 但对 KdV 方程(2.1)的解,恒有 $\frac{dE}{dt}=0$ $(E=E_0)$. 故可断言, 当 $\varepsilon\to 0$, (2.1) 的解 u_ε 不趋于极限方程 $u_t+uu_x=0$ 的包含击波的间断解. 我们再用 Гелефинд[4] 的办法来考察一下(2.1)解的极限是什么. 设 (2.1) 的解存在一个光滑过渡区,具有厚度 $\Delta(\varepsilon)$, 它相连二个不同的状态,当 $\varepsilon\to 0$,$\Delta(\varepsilon)\to 0$. 采用运动坐标系,令 $\xi=\frac{x-x(t)}{\Delta}$, $t'=t$, $x(t)$ 为未知的击波轨迹. $u(x,t)=u(\xi,t')$, 将 Δ 乘以(2.1)得

$$\varepsilon\Delta^{-2}u_{\xi\xi\xi}-(u-D)u_\xi=\Delta\cdot u_{t'} \tag{2.2}$$

设 $u_{t'}$ 有界，故当 $\Delta \to 0$ 时，$\Delta \cdot u_{t'} \to 0$；如取 $\Delta = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{1/2}$，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，(2.2) 趋于微分方程

$$u_{\xi\xi\xi} - (u - D)u_{\xi} = 0$$

且 $u \to u_1$，$\xi \to +\infty$；$u \to u_0$，$\xi \to -\infty$。此时解 $u(\xi, t')$ 由孤立子振动解组成，如图 3-2 所示。

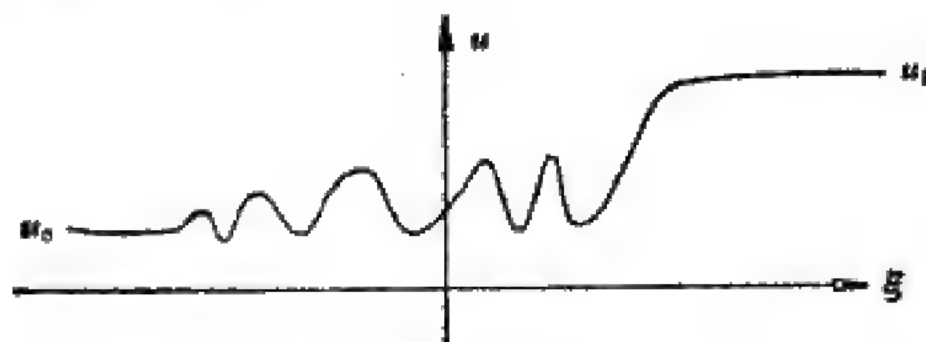


图 3-2

我们现从定性理论上分析这个问题，有如下定理：

定理 1 拟线性双曲型方程

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{2.3}$$

含有击波的解永远不能作为具色散方程(KdV 方程)

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon^2 u_{xxx} \tag{2.4}$$

的行波解的极限得到。

证明 这里指的击波解为

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u_0, & x - Dt < 0 \\ u_1, & x - Dt > 0 \end{cases}$$

且满足 $D(u_1 - u_0) = f(u_1) - f(u_0)$，$f'(u_1) < D < f'(u_0)$。现考虑(2.4)的行波解，$u(x, t) = u(\xi)$，这里

$$\xi = \frac{x - Dt}{\varepsilon}, \quad u_t = \left(\frac{-D}{\varepsilon}\right)\frac{du}{d\xi}, \quad u_x = \frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}$$

则有

$$u''' = [-Du + f(u)]'$$

积分一次

$$u'' = -Du + f(u) + C$$

$u(\xi)\to u_0$, $\xi\to-\infty$; $u(\xi)\to u$, $\xi\to+\infty$. 我们问此常微分方程的边值问题且满足 $f(u_1)-f(u_0)=D(u_1-u_0)$ 的连续解是否存在。

由

$$\begin{cases}u'=v\\ v'=-Du+f(u)\end{cases}$$

上述二阶常微分方程问题可化为常微分方程组的边值问题。令

$$P(u)=\frac{1}{2}Du^2-F(u),\quad F'(u)=f(u)$$

$$H(u,v)=\frac{1}{2}v^2+P(u)$$

则可化为典则方程组

$$\begin{cases}u'=v=Hv\\ v'=-Du+f(u)=-Hu\end{cases}$$

可认为 $v\to 0$ ($|\xi|\to\infty$)，故二个临界点为 $(u_0,0)$，$(u_1,0)$. $H(u(\xi),v(\xi))$ 沿轨线为常量，因此，如果二个临界点 $(u_0,0)$，$(u_1,0)$ 由一轨线相连，它必然在同一"能量曲面"上，即由 $H(u_0,0)=H(u_1,0)$ 推出 $P(u_0)=P(u_1)$，我们可证至少沿弱击波曲线此等式不成立. 事实上，与左端状态相连的弱冲击波量可用单参数 σ 来表示. $u=u(\sigma)$，$s(\sigma)(u(\sigma)-u_0)=f(u(\sigma))-f(u_0)$，$s(0)=f'(u_0)$，$p$ 也为 σ 的函数。

$$p(u(\sigma))=\frac{1}{2}s(\sigma)u^2(\sigma)-F(u(\sigma))$$

对 σ 微分

$$\dot{p}(u(\sigma))=\frac{1}{2}\dot{s}(\sigma)u^2+s(\sigma)u\dot{u}-f(u(\sigma))\dot{u}$$

由 R-H 条件 $s_u=f$ (恒可选取 $u_0=f(u_0)=0$)

$$\dot{p}(u(\sigma))=\frac{1}{2}\dot{s}(\sigma)u^2\neq 0$$

设 $f''(u) \neq 0$, $s(\sigma) \neq 0$, 故推出 $P(u_0) \neq P(u_1)$. 于是连接二个临界点的上述积分曲线是不存在的.



图 3-3

从图 3-3 的图形上看,

$$H(u, v) = \frac{1}{2} v^2 + P(u)$$

可画出在 u, v 平面上的H的等位线,$(u_1, 0)$ 为线性化矩阵 $\begin{pmatrix} H_{uu} & H_{uv} \\ H_{uv} & H_{vv} \end{pmatrix}$的中心点,故无轨迹进入它.

对于一维等温空气动力学方程组

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0 \\ v_t + P(u)_x = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $P'(u) < 0$, $P''(u) > 0$ 也有类似关系,有

定理 2 (2.5)方程组的击波解不能作为相应色散方程组的行波解的极限.

看来,对于双曲型方程加粘性的高阶导数项,为了保证粘性趋于 0 的收敛性必然是偶数阶的,至少对于二阶、四阶是这样.

我们现用 WKB 方法来构造近似解 u,

$$u_t + uu_x = \varepsilon^2 u_{xxx} \tag{2.6}$$

其中, $\varepsilon^2 \ll 1$. 如我们所知, WKB 法是数学物理中一种重要的近似方法,它曾用来求解线性常微分方程

$$\varepsilon^2\phi_{xx} + V(x)\phi = 0, \ \varepsilon^2 \ll 1 \tag{2.7}$$

其中，$V(x)$ 为在长度 $o(\delta)$ 缓慢变化的函数，设解的形式为

$$\phi(x;\varepsilon) \sim \phi(\theta, x; \varepsilon) \equiv W(x)e^{i\theta}, \ \theta \equiv \frac{B(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

于是引进二个未知函数W和B去代替一个未知函数ϕ，独立变元为二个，θ，x代替一个变元x. 我们能这样选取，使解对θ为周期的. 对于非线性偏微分方程，不能指望有指数形式解(2.8)，设 $u(x, t; \varepsilon)$ 可展成如下级数

$$u(x, t; \varepsilon) \sim U(\theta, x, t; \varepsilon) = U^{(0)}(\theta, x, t) + \varepsilon U^{(1)}(\theta, x, t) + \cdots \tag{2.9}$$

其中，$\theta = \theta(x, t; \varepsilon)$，可选取$\theta$周期为 1，即

$$U(\theta, x, t; \varepsilon) = U(\theta+1, x, t; \varepsilon)$$

如果定出 $\theta(x, t; \varepsilon)$，则得到近似解 $u(x, t; \varepsilon) \simeq U(\theta(x, t; \varepsilon), x, t; \varepsilon)$ 对于 KdV 方程(2.6)，令

$$\theta = \frac{B(x, t; \varepsilon)}{\varepsilon}$$

其中，$B = o(1)$. 令 $L \equiv B_t$，$K \equiv B_x$，$l = \frac{B_t}{B_x} = \frac{L}{K}$ 与θ无关.

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{L}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to \frac{K}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial x}$$

$u = U(\theta, x, t; \varepsilon)$，(2.6)乘以 ε/K 可得

$$lU_\theta + UU_\theta + K^2U_{\theta\theta\theta} + \varepsilon\left[\frac{1}{K}(U_t + UU_x) + 3(KU)_{x\theta\theta}\right] + \varepsilon^2\left\{\frac{1}{K}\left[K_{xx} - U + 3(KU_x)_x\right]\right\}_\theta + \varepsilon^3\frac{1}{K}U_{xxx} = 0 \tag{2.10}$$

将(2.9)代入(2.10)，我们得到 $U^{(i)}$ $(i = 0, 1, \cdots)$ 关于θ的一系列微分方程，第一个是

$$l^{(0)}U_\theta^{(0)} + U^{(0)}U_\theta^{(0)} + K^{(0)2}U_{\theta\theta\theta}^{(0)} = 0 \tag{2.11}$$

其中，$l^{(0)}$，$K^{(0)}$ 为 l，K 展开级数的第一项．积分二次得

$$\frac{1}{2}l^{(0)}[U^{(0)}] + \frac{1}{6}[U^{(0)}]^3 + \frac{1}{2}[K^{(0)}][U_\theta^{(0)}]^2 = mU^{(0)} + n \tag{2.12}$$

其中，m，n 为依赖于 x，t 的积分常数，固定 x，t，(2.12) 有解

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\theta, x, t) = & -l^{(0)} - (l^{(0)} + 2m) \\ & \cdot \{a + (b-a)\mathrm{Cn}^2[2\mathscr{K}(k)(\theta - \theta_0); k]\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，$k^2 = \dfrac{b-a}{c-a}$，Cn 为雅可比椭圆函数，$\mathscr{K}$ 为第一类完全椭圆积分，a，b，c 为(2.12)中 $U_\theta^{(0)} = 0$ 的根．

当 $i \geqslant 1$ 有 $U^{(i)}$ 的方程

$$\mathscr{L}U^{(i)} = N_i(U^{(i-1)}, \cdots, l^{(i)}, \cdots, K^{(i)}, \cdots)$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv l^{(0)}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}U^{(0)} + [K^{(0)}]^2\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}$$

非齐次项 N_i 仅含有低阶解的项，原则上可以一直求下去．重要的事实是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，从 (2.6) 所应得到的极限解为 (2.11)，而非 $u_t + uu_x = 0$．

第三节　孤立子的稳定性问题

我们这里考虑的是孤立子的线性稳定性问题，即 KdV 方程关于定常波解的小扰动的 Ляпнов 稳定性问题．设有 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

它有孤立波解(定常波)

$$u_0(x) = -u_\infty\left(1 - 3\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_\infty}{4\mu}}\,x\right),\quad u_\infty > 0 \tag{3.2}$$

关于这个定常波解设有小扰动 $v(x,t)$，即

$$u = u_0(x) + v(x,t), \quad |v| \ll |u_0| \tag{3.3}$$

代入(3.1)得 v 的线性方程

$$v_t + u_0 v_x + u_{0x} v + \mu v_{xxx} = 0 \tag{3.4}$$

设 $v(x,t) = f(x)g(t)$，$g(t) \propto e^{\sigma t}$，$\sigma = \text{const}$，则得到扰动函数 f 满足的方程

$$\frac{d^3 f}{dy^3} - 4(1 - 3\text{sech}^2 y)\frac{df}{dy} - (24\text{sech}^2 y \tanh y + \alpha) f = 0 \tag{3.5}$$

其中，$y \equiv \sqrt{\dfrac{u_\infty}{4\mu}}x$，$\alpha \equiv (-8\sigma/u_\infty)\sqrt{\mu/u_\infty}$，边界条件为

$$f \to 0, \quad |y| \to \infty \tag{3.6}$$

这个方程的独立无关解有三个：

$$\begin{aligned} f_k &= \lambda_k(\lambda_k - 2)^2 e^{\lambda_k y} + 4\frac{d^2}{dy^2}\{e^{(\lambda_k - 1)y}\text{sech}\, y\} \\ &= e^{\lambda_k y}[\lambda_k(\lambda_k - 2)^2 + 4e^{-y}\text{sech}\{\lambda_k(\lambda_k - 2) \\ &\quad - 2(\lambda_k - 1)\tanh y + 2\tanh^2 y\}], \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，λ_k 为三次方程

$$\lambda^3 - 4\lambda - \alpha = 0 \tag{3.8}$$

的根。特别如 $\alpha = 0$，此时为稳定情况 $(\sigma = 0)$，$\lambda_k = 0, 2$ 或 -2，此时 $f_k \propto \text{sech}^2 y \tanh y$ $(k = 1, 2, 3)$。因此有三个独立无关解

$$\begin{cases} f_1 = \text{sech}^2 y \tanh y \equiv f_0 \\ f_2 = 3y f_0 + \tanh^2 y - 2\text{sech}^2 y \\ f_3 = 15 y f_0 + 2\sinh^2 y + 7\tanh^2 y - 8\text{sech}^2 y \end{cases} \tag{3.9}$$

注意到(3.8)当 $\alpha = \mp 16/3\sqrt{3}$ 时，有重根 $\lambda = \pm 2/\sqrt{13}$，此时(3.9)中有二个相等，如 $f_1 \equiv f_2$，因此，必须选取三个新的独立无关解为

$$
\begin{cases}
f_1 = \lambda_0(\lambda_0 - 2)^2 e^{\lambda_0 y} + 4\dfrac{d^2}{dy^2}\{e^{(\lambda_0-1)y}\text{sech}y\} \\
f_2 = yf_1 + (3\lambda_0^2 - 8\lambda_0 + 4)e^{\lambda_0 y} + 8\dfrac{d}{dy}\{e^{(\lambda_0-1)y}\text{sech}y\} \\
f_3 = \lambda_3(\lambda_3 - 2)^2 e^{\lambda_3 y} + 4\dfrac{d^2}{dy^2}\{e^{(\lambda_3-1)y}\text{sech}y\}
\end{cases} \tag{3.10}
$$

其中，λ_0 表示 $2/\sqrt{3}$ 或 $-2/\sqrt{3}$；λ_3 为 $-4/\sqrt{3}$ 或 $4/\sqrt{3}$，依 λ_0 为 $2/\sqrt{3}$ 或 $-2/\sqrt{3}$ 而定．显然 (3.8) 没有三重根．我们容易看到由(3.7)，(3.9)或(3.10)解的任意线性组合不能满足边界条件 (3.6)，除非 f_0 取 (3.9) 形式，因而它为稳定解，这就推出 KdV 方程的孤立子波解依 Ляплов 意义下关于小扰动是稳定的．关于孤立子波的非线性稳定性及"Cnoidal wave"的稳定性问题，可见[4]，[5]．

第四节　水波和弱非线性作用下的波动方程

KdV 方程首先由 Korteweg-de Vries 于 1895 年在水波中在长波近似、小的但有限的振幅的假定下得到的．以下我们先在水波中推导这一方程．设在常数重力场中考虑无粘性的、不可压缩的流体(水)，空间坐标系 (x_1, x_2, y)，速度 $\boldsymbol{u}$ 的分量为 (u_1, u_2, v)，重力加速度取为 y 的负方向．于是有方程

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{4.1}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g\boldsymbol{j} \tag{4.2}
$$

现考虑为无旋运动，$\text{rot}\boldsymbol{u} = 0$，故存在速度势 $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$，由

$$
\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \text{rot}\boldsymbol{u}_{\times} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \tag{4.3}
$$

和(4.2)积分可得

$$\frac{p-p_0}{\rho_0}=B(t)-\varphi_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-gy$$

其中，$B(t)$ 为任意函数，p_0 为任意常数，令

$$\varphi'=\varphi-\int B(t)dt,$$

可得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\varphi,\ \frac{p-p_0}{\rho_0}=-\varphi'_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi')^2-gy \qquad (4.4)$$

以后仍记 φ' 为 φ，由(4.1)得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\Longrightarrow\nabla^2\varphi=0 \qquad (4.5)$$

设水的表面方程为

$$f(x_1,x_2,y,t)=0 \qquad (4.6)$$

在此表面上，流体质点不能穿过它，因此正交于此曲面的流体速度必须等于曲面的法向速度. (4.6) 的法向速度为

$$\frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}}$$

流体的法向速度为

$$\frac{u_1f_{x_1}+u_2f_{x_2}+vf_y}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}}$$

相等的条件为

$$f_t+u_1f_{x_1}+u_2f_{x_2}+vf_y=0 \qquad (4.7)$$

特别当 $y=\eta(x_1,x_2,t)$，$f(x_1,x_2,y,t)\equiv\eta(x_1,x_2,t)-y$ 时，由(4.7)得

$$\eta_t-u_1\eta_{x_1}+u_2\eta_{x_2}=v \qquad (4.8)$$

此外，在自由面上，$p=p_0$（忽略空气的运动），故为

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y, \\ \varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)+g\eta=0,\end{cases} \quad y=\eta(x_1,x_2,t)$$

$$(4.9)$$

其中，$u_1=\varphi_{x_1}$，$u_2=\varphi_{x_2}$，$v=\varphi_y$。由固体边界条件，流体的法向速度必须为 0，$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi=0$，特别在底部 $y=-h_0(x_1,x_2)$ 有 $\varphi_y+\varphi_{x_1}h_{0x}+\varphi_{x_2}h_{0x_2}=0$，如为水平底，有 $\varphi_y=0$，$y=-h_0$。于是我们整个问题的提法如下：寻求速度势 φ 和表面 η，满足

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{4.10}$$

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y, \\ \varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)-g\eta=0,\end{cases} \quad y=\eta(x_1,x_2,t)$$

$$(4.11)$$

$$\varphi_y=0,\ y=-h \tag{4.12}$$

为简单起见，我们以下考虑一维情况，即 $\eta=\eta(x,t)$，取 y 从水平底测量，此时 $\varphi_y=0$，$y=0$，引进二个参量：

$$\alpha=\frac{a}{h_0},\ \beta=\frac{h_0^2}{l^2}$$

其中，a 为波的振幅，l 为波长，$y=h_0+\eta$。令 $x=lx'$，$y=h_0y'$，$t=\frac{lt'}{c_0}$，$\eta=a\eta'$，$\varphi=\frac{gla\varphi'}{c_0}$，$c_0^2=gh_0$，再忽略“′”记号，由(4.5)，(4.11)，(4.12)有

$$\beta\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\ 0<y<1+\alpha\eta \tag{4.13}$$

$$\varphi_y=0,\ y=0 \tag{4.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\eta_t+\alpha\varphi_x\eta_x-\frac{1}{\beta}\varphi_y=0\\ &\eta+\varphi_t+\frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_y^2=0\end{aligned}\right\} y=1+\alpha\eta \tag{4.15}$$

(4.13)，(4.14) 的形式解为

$$\varphi = \sum_{0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \beta^{2m} \tag{4.16}$$

其中，$f = f_0(x, t)$，将(4.16)代入(4.15)第一式得

$$\eta_t + \alpha \left[f_x - (1 + \alpha\eta) \eta_x f_{xx}' \beta - \frac{(1 + \alpha\eta)^2}{2} f_{xxx} \beta + \cdots \right] \eta_x$$

$$+ (1 + \alpha\eta) f'' - \frac{1}{3!} (1 + \alpha\eta)^3 \cdot f_{xxxx} \beta + o(\beta^2) = 0$$

即

$$\eta_t + \{(1 + \alpha\eta) f_x\}_x - \left\{ \frac{1}{6} (1 + \alpha\eta)^3 f_{xxxx} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha\eta)^2 f_{xxx} \eta_x \right\} \beta + o(\beta^2) = 0 \tag{4.17}$$

同样，代入(4.15)中的第二式，得

$$\eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha\eta)^2 \{ f_{xxt} + \alpha f_x f_{xxx} - \alpha f_{xx}^2 \} \beta$$

$$+ o(\beta^2) = 0 \tag{4.18}$$

在(4.17)，(4.18)中，如果忽略 β 的一阶项，并由(4.18)对 x 微分得

$$\begin{cases} \eta_t + \{(1 + \alpha\eta) w\}_x = 0 \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x = 0 \end{cases} \quad w = f_x \tag{4.19}$$

如果保留 β 的一阶项，则有

$$\begin{cases} \eta_t + \{(1+\alpha\eta) w\}_x - \dfrac{1}{6} \beta w_{xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0 \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x - \dfrac{1}{2} \beta w_{xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

如在(4.20)中忽略 α，β 的一阶项，则当 $w = \eta$ 时，有同一方程 $\eta_t + \eta_x = 0$，故 w 可以依 α，β 展开，

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + O(\alpha^2 + \beta^2)$$

其中，A，B 为 η 及 η 对 x 的导数的函数，由(4.20)可得

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta\left(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}\right)$$

$$+ O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta\left(B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}\right)$$

$$+ O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

因 $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha, \beta)$，故在一阶项中对 t 的导数可换为对 x 的导数，特别当取 $A = -\frac{1}{4}\eta^2$, $B = \frac{1}{3}\eta_{xx}$，上面二个方程一致，有

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} + O(\alpha^2+\beta^2) = 0 \quad (4.21)$$

此时

$$w = \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx} + O(\alpha^2 + \beta^2)$$

在方程(4.21)中如忽略二阶项，则得到典型的 KdV 方程

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0 \quad (4.22)$$

如在(4.22)中，令 $\eta_{xxx} = -\eta_{xxt}$，有

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{1}{6}\beta\eta_{xxt} = 0 \quad (4.23)$$

此为 Benjamain 方程。

以下我们推导一类相当广泛的弱非线性相互作用下的波动方程，归结它为 KdV 方程或 Burgers 方程。

设有方程组

$$\begin{cases} n_t + (nu)_x = 0 & (4.24) \\ (nu)_t + (nu^2 + P)_x = 0 & (4.25) \\ P = P(f, n, u, f_i, n_i, u_i, f_{ij}, n_{ij}, u_{ij}, \cdots) & (4.26) \\ F(f, n, u, f_i, n_i, u_i, f_{ij}, n_{ij}, u_{ij}, \cdots) = 0 & (4.27) \end{cases}$$

其中，n，u，f 为状态变元，以 n 表示质点的数密度，u 表示质点的速度，i，j 分别表示对空间变元 x 和时间变元 t 的导数，P 一般表示状态变量 (n, u, f) 及其导数的函数，如果 f 代表参量函数，则 P 为 n，u 及其导数的函数. (4.24)为质量守恒，(4.25)为动量守恒，以下举几个例子说明之.

(i) 气体动力学：f 为压力 p

$$P = \frac{1}{m}(p - \mu u_x), \quad F = P - A\rho^{\gamma}, \quad mn = \rho \qquad (4.28)$$

ρ 为密度，μ 为粘性系数

(ii) 浅水波：n 为水深 h，此时仅有二个状态变元 h，u.

$$P = \frac{1}{2}gh^2 - \frac{1}{3}h^3(u_{xt} + uu_{xx} + u_x^2) \qquad (4.28)'$$

(iii) 冷的等离子体的磁流体波：f 为磁强 B，$P = \frac{1}{2}B^2$

$$F \equiv B - n - (B_x/n)_x = 0 \qquad (4.29)$$

(iv) 冷的等离子体的离子声波：f 为静电势，ϕ 为波函数，

$$P = e^{\phi} - \frac{1}{2}\phi_x^2, \quad F \equiv n - e^{\phi} + \phi_{xx} = 0 \qquad (4.30)$$

在局部热力学平衡态的状态下，若 P，F 中的所有导数消失，则有

$$P = P(f, n), \quad F(f, n) = 0 \qquad (4.31)$$

此时由(4.25)，有

$$nu_t + nuu_x + P_x = 0, \quad P_x = \frac{\partial P}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}$$

再利用

$$\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

消去 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 即得

$$u_t + uu_x + (a^2/n)n_x = 0, \quad a^2 = [P_n - (F_n/F_f)P_f]$$

如果 $a^2 > 0$，则

$$\begin{cases} n_t + (nu)_x = 0 \\ u_t + uu_x + (a^2/n)n_x = 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

为双曲型方程组，其特征线为 $\frac{dx}{dt} = u \pm a$，a 为波速，由关于均匀态的小扰动，即得波动方程

$$u_{tt} - a_0^2 u_{xx} = 0$$

a_0 为均匀态波速. 在以下推导 KdV 方程和 Burgers 方程中，必须考虑小扰动的非线性项，即 P，F 导数的效应. 我们作如下变换：

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon^{\alpha}(x - a_0 t) \\ \tau = \varepsilon^{\alpha+1} t \end{cases} \tag{4.33}$$

其中，ε 表示初始扰动的振幅，恒设 $\varepsilon < 1$，指数 $\alpha > 0$，待定，a_0 表示某种波速，视为常数. 将 (4.33) 代入 (4.24)，(4.25)，得

$$\varepsilon n_\tau + (u - a_0)n_\xi + nu_\xi = 0 \tag{4.34}$$

$$\varepsilon u_\tau + (u - a_0)u_\xi + n^{-1}P_\xi = 0 \tag{4.35}$$

状态变元 (n, f, u) 依 ε 作渐近展开. 在平衡态 $A = (n, f, u) = (n_0, f_0, 0)$ 附近作展开：

$$\begin{cases} n = n_0 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots \\ f = f_0 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \cdots \\ u = 0 + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots \end{cases}$$

P，F 也作展开

$$P = P_0 + P_{f_0}(f - f_0) + P_{n_0}(n - n_0) + P_{u_0}(u - u_0) + O(\varepsilon^2)$$

$$F = F_0 + F_{f_0}(f - f_0) + F_{n_0}(n - n_0) + F_{u_0}(u - u_0) + O(\varepsilon^2)$$

由于方程关于 Galileo 的不变性，$P_{u_0}=F_{u_0}=0$，由 $P^{(1)}=P_{f_0}f^{(1)}+P_{n_0}n^{(1)}$ 及 $F_{f_0}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi}+F_{n_0}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}=0$，所以

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial\xi}=P_{f_0}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi}+P_{n_0}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}=\left[P_{n_0}-\left(\frac{F_{n_0}}{F_{f_0}}\right)P_{f_0}\right]\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}$$
$$=a_0^2\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}.$$

若上述展开考虑到二阶项，可得

$$P_\xi^{(2)}\approx a_0^2n_\xi^{(2)}+A_n^{(1)}n_\xi^{(1)}+\varepsilon^{a-1}Bn_{\xi\xi}^{(1)}+\varepsilon^{2a-1}cn_{\xi\xi\xi}^{(1)}$$

常数 a_0^2，A，B，C 对于上述例子具有如下表：

	a_0	A	B	C
空气动力学	$2KT/m$	0	$-\nu a_0$	0
水波	gh_0	0	0	$\frac{1}{3}gh_0^3$
磁流体波	B_0	1	0	1
离子声波	1	0	0	1

由(4.34)，(4.35)比较 ε 一阶项有

$$a_0n_\xi^{(1)}=n_0u_\xi^{(1)},\quad a_0u_\xi^{(1)}=\left(\frac{a^2}{n_0}\right)n_\xi^{(1)}$$

积分之并利用边界条件，有$a_0n^{(1)}=n_0u^{(1)}$，代入(4.34)，(4.35)，取二级近似，得

$$n_\tau^{(1)}+u^{(1)}n_\xi^{(1)}+n_0u_\xi^{(2)}+n^{(1)}u_\xi^{(1)}-a_0n_\xi^{(2)}=0$$

即

$$n_\tau^{(1)}+2\frac{a_0}{n_0}n^{(1)}n_\xi^{(1)}-a_0n_\xi^{(2)}+n_0u_\xi^{(2)}=0$$

及

$$\frac{a_0}{n_0} n_\tau^{(1)} + \frac{A}{n_0} n^{(1)} n_\xi^{(1)} + \varepsilon^{\alpha-1} \frac{B}{n_0} n_{\xi\xi}^{(1)} + \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{C_0}{n_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)}$$

$$+ \frac{a_0^2}{n} n_\xi^{(2)} + u^{(1)} u_\xi^{(1)} - a_0 u_\xi^{(2)} = 0$$

由

$$-a_0 u_\xi^{(2)} + \frac{a_0^2}{n_0} n_\xi^{(2)} = \frac{a_0}{n_0} \left(n_\tau^{(1)} + 2 \frac{a_0}{n_0} n^{(1)} n_\xi^{(1)} \right)$$

消去 $n_\xi^{(2)}$, $u_\xi^{(2)}$ 得 $n^{(1)}$ 的方程

$$n_\tau^{(1)} + \left(\frac{A}{2a_0} + \frac{3}{2} \frac{a_0}{n_0} \right) n^{(1)} n_\xi^{(1)} + \varepsilon^{\alpha-1} \frac{B}{2a_0} n_{\xi\xi}^{(1)}$$

$$+ \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{C}{2a_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0 \tag{4.36}$$

在(4.36)中,如 $B \neq 0$ (耗散, $B < 0$), $\alpha = 1$, $C = 0$, 则得到 Burgers 方程;如 $B = 0$ (色散), $\alpha = \frac{1}{2}$, 则得到 KdV 方程

$$n_\tau^{(1)} + \left(\frac{A}{2a_0} + \frac{3}{2} \frac{a_0}{n_0} \right) n^{(1)} n_\xi^{(1)} + \frac{C}{2a_0} n_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0$$

参 考 文 献

[1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.*, **15**(1965), 240—243.

[2] P. D. Lax, *Comm. Pure and Appl. Math.*, Vol. **21**(1968), 467—490.

[3] Y. A. Berezin, V. I. Karpman, *Sov. Phys-JETP.*, Vol.**24** (1967), 1047.

[4] И. М. Гелефанд, *Некоторые Задачи* Теории Квазилинейных Уравнений, УМН14, вып. **2**(86) (1959), 87—158.

[5] D. B. Cohn and K. R. Mackenzie, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **30**(1973), 258.

[6] P. D. Lax, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **10**(1957), 537—566.

[7] 张学铭,应用数学与计算数学,第三卷,1979,50—83.

[8] 张学铭,数学物理学报,第四卷,第一期,1984,1—6.

[9] Guan Ke-Ying, *Kexue Tongbao, Special Issue.*, (1983), 80—93.

[10] 徐邦清,数学物理学报,第二卷,第四期,1982,421—434.

第四章　Hirota 方法

第一节　引　　言

在求解某些非线性进化方程的N个孤立子的方法中，除了散射反演法、结构延拓法外，还有一种重要而直接的方法，这就是利用函数变换求特解的 Hirota 方法．这种方法已从求 KdV 方程、MKdV 方程、Sine-Gordon 方程、Toda 晶格方程、Boussinesq 方程的N个孤立子解而发展成为一种求解一大批非线性进化方程孤立子解的相当普遍的方法．用这种方法还可求得这些非线性进化方程的 Bäcklund 变换．

我们先以 KdV 方程为例，简要地介绍这种方法．设 KdV 方程具有形式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

且满足边界条件 $u = 0$，$|x| \to \infty$．我们用微扰方法求解(1.1)．令 $u = w_x$，将(1.1)对 x 积分可得

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

其中，选取积分常数为 0．依小参数 ε 展开，w为幂级数，有

$$w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots \tag{1.3}$$

将(1.3)代入(1.2)，合并 ε 的同幂次项得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) w_1 = 0 \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) w_2 = -3(w_1)_x^2 \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)w_1=-6(w_1)_x(w_2)_x \tag{1.6}$$

$$\cdots\cdots$$

逐次求解这些方程能得到这个扰动级数的形式解．但这级数可能收敛得很慢甚至发散，因此得考虑类似 Padé 近似的办法．

将 $w=G/F$ 代入(1.2)，有

$$\begin{aligned}&(G_tF-GF_t)/F^2+3(G_xF-GF_x)^2/F^4\\&\quad+(G_{xxx}F-3G_{xx}F_x-3G_xF_{xx}-GF_{xxx})/F^2\\&\quad+6(FG_xF_x^2+FGF_xF_{xx}-GF_x^3)/F^4=0\end{aligned} \tag{1.7}$$

粗看起来，方程(1.7)比原来方程更复杂，而且在一个方程中含有二个未知函数 F 和 G．但我们注意到(1.7)可改写为

$$\begin{aligned}&[G_tF-GF_t+3\lambda(G_xF-GF_x)+G_{xxx}F-3G_{xx}F_x\\&\quad+3G_xF_{xx}-GF_{xxx}]/F^2+3(G_xF-GF_x)[G_xF\\&\quad-GF_x-2(FF_{xx}-F_x^2)-\lambda F^2]/F^4=0\end{aligned} \tag{1.8}$$

引入任意参数 λ，可得二个方程

$$\begin{aligned}G_tF-GF_t+3\lambda(G_xF-GF_x)+G_{xxx}F-3G_{xx}F_x\\+3G_xF_{xx}-GF_{xxx}=0\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$2(FF_{xx}-F_x^2)+\lambda F^2-(G_xF-GF_x)=0 \tag{1.10}$$

它们还可分别表示为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}+3\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^3\right]\cdot G(x,t)F(x',t')\big|_{x=x',t=t'}=0 \tag{1.11}$$

和

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2+\lambda\right]F(x,t)F(x',t')\big|_{\substack{x=x'\\t=t'}}-\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)G(x,t)F(x',t')\big|_{\substack{x=x'\\t=t'}}=0 \tag{1.12}$$

为了表示方便，引入算子 D_t，D_x 以及它们的各种乘积如

下：

$$D_t^n D_x^m f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m f(x,t)g(x',t')|_{x=x',t=t'} \tag{1.13}$$

于是利用这些符号，(1.11)，(1.12)可简写为

$$(D_t + 3\lambda D_x + D_x^3)G \cdot F = 0 \tag{1.14}$$

$$(D_x^2 + \lambda)F \cdot F - D_x G \cdot F = 0 \tag{1.15}$$

(1.15) 能写为

$$\lambda = (G/F)_x - 2(\log F)_{xx} \tag{1.16}$$

若取 $\lambda = 0$，可知

$$G = 2F_x \tag{1.17}$$

为(1.16)的解．于是有

$$u = (G/F)_x = 2(\log F)_{xx} \tag{1.18}$$

将(1.17)代入(1.14)可得

$$(D_t + D_x^3)F_x \cdot F = 0 \tag{1.19}$$

或

$$D_x(D_t + D_x^3)F \cdot F = 0 \tag{1.20}$$

第二节　D 算子的某些性质

我们在第一节中已知

$$D_t^n D_x^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(x,t)b(x',t')|_{t=t',x=x'},$$

再引入算子 D_z 和微分算子 $\frac{\partial}{\partial z}$ 如下：

$$D_z = \delta D_t + \varepsilon D_x, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \delta \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$$

其中，δ 和 ε 都是常数. 从 D 算子定义易得到以下性质:

(I) $\quad D_x^m a\cdot 1=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m a$

(II) $\quad D_x^m a\cdot b=(-1)^m D_x^m b\cdot a$

(II.1) $\quad D_x^m a\cdot a=0$，对于 m 为奇数

(III) $\quad D_x^m a\cdot b=D_x^{m-1}(a_x\cdot b-a\cdot b_x)$

(III.1) $\quad D_x^m a\cdot a=2D_x^{m-1}a_x\cdot a$，当 m 为偶数

(III.2) $\quad D_xD_ta\cdot a=2D_xa_t\cdot a=2D_ta_x\cdot a$

(IV) $\quad D_x^m\exp(p_1,x)\cdot\exp(p_2x)=(p_1-p_2)^m\exp[(p_1+p_2)x]$

设 $F(D_t,D_x)$ 为 D_t 和 D_x 的多项式，则有

(IV.1) $\quad F(D_t,D_x)\exp(\Omega_1t+p_1x)\exp(\Omega_2t+p_2x)$

$$=F(\Omega_1-\Omega_2,p_1-p_2)/F(\Omega_1+\Omega_2,p_1+p_2)\cdot F(D_t,D_x)\exp[(\Omega_1+\Omega_2)t+(p_1+p_2)x]$$

(V) $\quad \exp(\varepsilon D_x)a(x)\cdot b(x)=a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)$

(VI) $\quad \exp(\varepsilon D_x)ab\cdot cd=[\exp(\varepsilon D_x)a\cdot c]\cdot[\exp(\varepsilon D_x)b\cdot d]$

$$=[\exp(\varepsilon D_x)a\cdot d][\exp(\varepsilon D_x)b\cdot c]$$

(VI.1) $\quad D_xab\cdot c=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)bc+a(D_xb\cdot c)$

(VI.2) $\quad D_x^2ab\cdot c=\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)bc+2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)D_xb\cdot c+a(D_x^2b\cdot c)$

(VI.3) $\quad D_x^3ac\cdot bc=(D_x^3a\cdot b)c^2+3(D_xa\cdot b)D_x^2b\cdot c$

(VI.4) $\quad D_x^m\exp(px)a\cdot\exp(px)b=\exp(2px)D_x^ma\cdot b$

(VII) $\quad \exp(\delta D_t)[\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b]\cdot[\exp(\varepsilon D_x)c\cdot d]$

$$=\exp(\varepsilon D_x)[\exp(\delta D_t)a\cdot c]\cdot[\exp(\delta D_t)b\cdot d]$$

$$=[\exp(\delta D_t+\varepsilon D_x)a\cdot d]$$

$$\cdot [\exp(-\delta D_t + \varepsilon D_x) c \cdot b]$$

以下等式对于变换非线性微分方程为双线性形式是有用的：

(VIII) $$\exp\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right)[a/b] = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot b] / [\cosh(\varepsilon D_z) b \cdot b]$$

(VIII.1) $$\frac{\partial}{\partial z}(a/b) = \frac{D_z a \cdot b}{b^2}$$

(VIII.2) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(a/b) = \frac{D_z^2 a \cdot b}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{D_z^2 b \cdot b}{b^2}$$

(VIII.3) $$\frac{\partial^3}{\partial z^3}(a/b) = \frac{D_z^3 a \cdot b}{b^2} - 3\left[\frac{D_z a \cdot b}{b^2} \cdot \frac{D_z^2 b \cdot b}{b^2}\right]$$

(IX) $$2\cosh\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\right) \log f = \log[\cosh(\varepsilon D_z) f \cdot f]$$

(IX.1) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \log f = \frac{\partial_z^2 f \cdot f}{2f^2}$$

(IX.2) $$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \log f = \frac{D_z^4 f \cdot f}{2f^2} - 6\left[\frac{D_z^2 f \cdot f}{2f^2}\right]^2$$

以下等式对于变换双线性微分方程为原来非线性方程是有用的.

(X) $$\exp(\varepsilon D_x) a \cdot b = \left\{\exp\left[2\cosh\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \log b\right]\right\} \left[\exp\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right)(a/b)\right]$$

令 $\phi = a/b$, $u = 2(\log b)_{xx}$, 我们有

(X.1) $$(D_x a \cdot b)/b^2 = \phi_x$$

(X.2) $$(D_x^2 a \cdot b)/b^2 = \phi_{xx} + u\phi$$

(X.3) $$(D_x^3 a \cdot b)/b^2 = \phi_{xxx} + 3u\phi_x$$

(X.4) $(D_x^4 a\cdot b)/b^2 = \phi_{xxxx} + 6u\phi_{xx}$

$+ (u_{xx} + 3u^2)\phi$

(XI) $$\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b = \exp\left[\sinh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\log(a/b)\right.$$

$$\left. + \cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\log(ab)\right]$$

令 $\varphi = \log(a/b)$，$\rho = \log(ab)$，我们有

(XI.1) $(D_x a\cdot b)/ab = \varphi_x$

(XI.2) $(D_x^2 a\cdot b)/a\cdot b = \rho_{xx} + \varphi_x^2$

(XI.3) $(D_x^3 a\cdot b)/ab = \varphi_{xxx} + 3\varphi_x\rho_{xx} + \varphi_x^3$

(XI.4) $(D_x^4 a\cdot b)/a\cdot b = \rho_{xxxx} + 4\varphi_x\varphi_{xxx}$

$+ 3(\rho_{xx})^2 + 6\varphi_x^2\rho_{xx} + \varphi_x^4$

以上所列出的D算子性质都很容易验证，我们以 (X) 为例证之，有

$$2\cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\log b = \log b(x+\varepsilon) + \log b(x-\varepsilon)$$

$$\exp\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)(a/b) = a(x+\varepsilon)/b(x+\varepsilon)$$

从(V)有

$$\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b = a(x+\varepsilon)b(x-\varepsilon)$$

因此，

$$\exp(\varepsilon D_x)a\cdot b = \exp\left[2\cosh\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\log b\right]$$

$$\cdot\left[\exp\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)(a/b)\right]$$

这就证明了 (X). 而等式 (X.1—4) 能由展开 (X) 作为 ε 的幂级数，比较 ε 的同次幂方程得到。

第三节　双线性微分方程的解

我们求解(1.20)，将 F 展为小参数 ε 的幂级数

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots \tag{3.1}$$

将(3.1)代入(1.20)，比较 ε 的同次幂得到

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_1 = 0 \tag{3.2}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_2 = -D_x(D_t + D_x^3) f_1 \cdot f_1 \tag{3.3}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_3 = -D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2) \tag{3.4}$$

……

我们寻求两种形式的解：I) 多项式解，II) 指数形式的解。

对于 I)，可找到

$$f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + bt - 24 a_4 t x \tag{3.5}$$

为(3.2)的一个解。当 $a_4 = 0$，$3a_1 a_3 = a_2^2$，$b = 12 a_3$ 时，可选取 $f_2 = 0$。因此得到(1.20)的一个精确解为

$$F = 1 + \varepsilon[a_0 + a_1 x + (3a_1 a_3)^{\frac{1}{2}} x^2 + a_3(x^3 + 12t)] \tag{3.6}$$

如置边界条件 $u|_{x=0} = 0$，则 $a_1 = 0$。当选取 $\varepsilon = 1$ 时，F 的表达式为

$$F = a_3[x^3 + 12(t + \text{const})] \tag{3.7}$$

因 $u = 2(\log F)_{xx}$，利用解的有界性条件得到

$$u = -6x(x^3 - 24t)/(x^3 + 12t)^2 \tag{3.8}$$

对于情况 II)，从(3.2)有

$$f_1 = \sum_{j=1}^{N} a_j \exp(\Omega_j t + p_j x) \tag{3.9}$$

其中，$\Omega_i + p_i^3 = 0$，p_i 和 a_i 均为常数。

将(3.9)代入(3.3)，利用 D 算子的性质(IV)和(IV.1)，可得

$$f_2 = \sum_{i>j}^{N} \exp(A_{ij} + \eta_i + \eta_j) \tag{3.10}$$

其中，$\exp(\eta_j) = a_j \exp(\Omega_j t + p_j x)$，且

$$\begin{aligned}\exp(A_{ij}) &= -\frac{(p_i - p_j)[\Omega_i - \Omega_j + (p_i - p_j)^3]}{(p_i + p_j)[\Omega_i + \Omega_j + (p_i + p_j)^3]} \\ &= (p_i - p_j)^2/(p_i + p_j)^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

将(3.10)代入(3.4)，利用 D 算子性质（VI.4）和关系(3.2)，可得

$$f_3 = \sum_{i>j>k}^{N} \exp(A_{ijk} + \eta_i + \eta_j + \eta_k) \tag{3.12}$$

其中

$$\exp(A_{ijk}) = \exp(A_{ij} + A_{ik} + A_{jk}) \tag{3.13}$$

一直到求出 f_N，我们得到精确解

$$F = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i>j}^{(N)} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{j} \mu_j\eta_j\right) \tag{3.14}$$

其中，$\sum\limits_{\mu=0,1}$ 表示对 $\mu_1 = 0, 1$；$\mu_2 = 0, 1$；$\cdots$；$\mu_N = 0, 1$ 所有可能的组合求和；$\sum\limits_{i>j}^{(N)}$ 表示从 N 个元素所有可能的对中求和。小参数 ε 已吸收到常数项 a_i 中去。(3.14) 连同 $u = 2(\log F)_{xx}$ 给出 KdV 方程的 N 个孤立子解公式。

第四节　在 Sine-Gordon, MKdV 等方程中的应用

我们先考虑如下形式的 Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi \tag{4.1}$$

设 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\to 0\ (|x|\to\infty)$. 令

$$\varphi(x,t)=4\tan^{-1}[g(x,t)/f(x,t)] \tag{4.2}$$

其中

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{[\frac{N}{2}]}\sum_{N^{C}n}a(i_1,i_2,\cdots,i_{2n})\cdot\exp(\eta_{i_1}+\eta_{i_2}+\cdots+\eta_{i_{2n}}) \tag{4.3}$$

$$g(x,t)=\sum_{m=0}^{[(N-1)/2]}\sum_{N^{C}2m+1}a(j_1,j_2,\cdots,j_{2m+1})\cdot\exp(\eta_{j_1}+\eta_{j_2}+\cdots+\eta_{j_{2m+1}}) \tag{4.4}$$

$$a(i_1,i_2,\cdots,i_n):\begin{cases}\prod\limits_{k<l}^{(n)}a(i_k,i_l), & n\geqslant 2\\ 1, & n=0,1\end{cases}$$

$$a(i_k,i_l)=\frac{(p_{i_k}-p_{i_l})^2-(\Omega_{i_k}-\Omega_{i_l})^2}{(p_{i_k}+p_{i_l})^2-(\Omega_{i_k}+\Omega_{i_l})^2}=-\frac{(p_{i_k}-p_{i_l}+\Omega_{i_k}-\Omega_{i_l})^2}{(p_{i_k}-p_{i_l}+\Omega_{i_k}+\Omega_{i_l})^2}$$

$$\eta_i=p_ix-\Omega_it-\eta_i^0,\quad p_i^2-\Omega_i^2=1$$

p_i 为任意的有限的实常数，它决定第 i 个孤立子的振幅，η_i^0 为任意的有限实常数，它决定第 i 个孤立子的位相。设 p_i 为相异的。

例如，$N=3$，有

$$f(x,t)=1+a(1,2)\exp(\eta_1+\eta_2)+a(1,3)\exp(\eta_1+\eta_3)+a(2,3)\exp(\eta_2+\eta_3),$$

$$g(x,t)=\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2)+\exp(\eta_3)+a(1,2,3)\exp(\eta_1+\eta_2+\eta_3)$$

$$a(1,2,3)=a(1,2)a(1,3)a(2,3),$$

$$\eta_i=p_ix-\Omega_it,\quad p_i^2-\Omega_i^2=1$$

当 $t\to\infty$ 时，保持 η_1 有限，对 $\Omega_3/p_3>\Omega_2/p_2>\Omega_1/p_1>0$，$p_i>0$，$g(x,t)/f(x,t)=\exp(\eta_1)$，可得到孤立波

$$i(x,t)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-2p_1\mathrm{sech}(\eta_1)$$

以下我们简略地证明 φ 的表达式(4.2)，(4.3)，(4.4)确为方程(4.1)的解.

为此，将(4.2)代入(4.1)，可得 f，g 满足的方程

$$fg_{xx}-2f_xg_x+f_{xx}g-(fg_{tt}-2f_tg_t+f_{tt}g)=fg \quad (4.5)$$

$$f_{xx}f-2f_x^2+ff_{xx}-(f_{tt}f-2f_t^2+ff_{tt})$$
$$=g_{xx}g-2g_x^2-(g_{tt}g-2g_t^2+gg_{tt}) \quad (4.6)$$

将 f，g 的表达式(4.3)，(4.4)代入(4.5)，(4.6)可得如下关系式

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{n^C l}a(i_1,i_2,\cdots,i_l)a(i_{l+1},i_{l+2},\cdots,i_n)$$
$$\cdot h_1(i_1,i_2,\cdots,i_l;i_{l+1},i_{l+2},\cdots,i_n)=0$$
$$\text{对 } n=1,3,5,\cdots,\leqslant N \quad (4.7)$$

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{n^C l}(-1)^l a(i_1,i_2,\cdots,i_l)a(i_{l+1},i_{l+2},\cdots,i_n)$$
$$\cdot h_2(i_1,i_2,\cdots,i_l;i_{l+1},i_{l+2},\cdots,i_n)=0$$
$$\text{对 } n=2,4,6,\cdots,\leqslant N \quad (4.8)$$

其中

$$h(i_1,i_2,\cdots,i_l;i_{l+1},i_{l+2},\cdots,i_n)$$
$$=(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_l}-p_{i_{l+1}}-p_{i_{l+2}}-\cdots-p_{i_n})^2$$
$$-(\Omega_{i_1}+\Omega_{i_2}+\cdots+\Omega_{i_l}-\Omega_{i_{l+1}}$$
$$-\Omega_{i_{l+2}}-\cdots-\Omega_{i_n})^2$$

对于给定 n，(4.7)，(4.8) 能变为如下恒等式

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n=\pm1}\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i\right)\hat{b}(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)$$
$$\cdot\hat{h}_1(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)=0,\text{当 } n \text{ 为奇数} \quad (4.9)$$

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_n=\pm 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i\right)\hat{b}(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)$$

$$\cdot\hat{h}_2(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)=0,\text{ 当 } n \text{ 为偶数} \quad (4.10)$$

其中

$$\hat{b}(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)=\prod_{k<l}^{(n)}(\sigma_kx_k-\sigma_lx_l)^2$$

$$\hat{h}_1(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}{}'\sigma_lx_l\right)$$

$$-\prod_{i=1}^{n}\sigma_ix_i$$

$$\hat{h}_2(\sigma_1x_1,\sigma_2x_2,\cdots,\sigma_nx_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}{}'\sigma_lx_l\right)$$

$$x_i=p_i+\Omega_i$$

事实上，设(4.9)左边表示为 $D_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它具有性质

(i) D_1 为对称齐次多项式

(ii) 如 $x_1=\pm x_2$，则

$$D_1(x_1,\cdots,x_n)_{x_1=\pm x_2}=8x_1^4\prod_{i=3}^{n}(x_1^2-x_i^2)^2D(x_3,x_4,\cdots,x_n)$$

易见(4.9)对 $n=1$ 成立．设对 $n-2$ 成立，则由 (i)，(ii) 可看到 D_1 为 $2n(n-1)$ 阶

$$\prod_{k<l}^{(n)}(x_k^2-x_l^2)^2$$

的对称齐次多项式；另一方面，直接可看出 D_1 为 n^2 阶多项式，故对于给定的 n，$D_1=0$，同理 $D_2=0$．

其次，我们考虑如下形式的 MKdV 方程

$$v_t+24v^2v_x+v_{xxx}=0 \quad (4.11)$$

$$v(x,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (4.12)$$

设

$$\tan\varphi(x,t)=g(x,t)/f(x,t) \tag{4.13}$$

其中

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{[N/2]}\sum_{N^c n}a(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_{2n})$$

$$\cdot\exp(\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\cdots+\xi_{i_{2n}}) \tag{4.14}$$

$$g(x,t)=\sum_{n=0}^{[(N-1)/2]}\sum_{N^c 2m+1}a(i_1,i_2,\cdots,i_{2m+1})$$

$$\cdot\exp(\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\cdots+\xi_{i_{2m+1}}) \tag{4.15}$$

$$a(i_1,i_2,\cdots,i_n)=\prod_{k<l}^{(n)}a(i_k,i_l),\quad n\geqslant 2$$

$$=1,\qquad\qquad n=0,1$$

$$a(i_k,i_l)=-\frac{(p_{i_k}-p_{i_l})^2}{(p_{i_k}+p_{i_l})^2}$$

$$\xi_i=p_i x-\Omega_i t-\xi_i^0$$

$$\Omega_i=p_i^3$$

$N=3$，有

$$f(x,t)=1+a(1,2)\exp(\xi_1+\xi_2)+a(1,3)\exp(\xi_2+\xi_3)$$

$$+a(2,3)\exp(\xi_2+\xi_3)$$

$$g(x,t)=\exp(\xi_1)+\exp(\xi_2)+\exp(\xi_3)$$

$$+a(1,2,3)\exp(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

$$a(1,2,3)=a(1,2)a(1,3)a(2,3)$$

$$\xi_i=p_i x-p_i^3 t$$

当 $t\to\infty$ 时，ξ_1 为固定有限，

$$g/f=\exp(\xi_1),\quad p_3>p_2>p_1>0$$

有孤立子解

$$v(x,t)=p_1/2\operatorname{sech}\xi_1$$

f，g 满足方程

$$g_t f - g f_t + g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x + 3g_x f_{xx} - g f_{xxx} = 0 \quad (4.16)$$

$$f f_{xx} - 2f_x^2 + f_{xx} f + g g_{xx} - 2g_x^2 + g_{xx} g = 0 \quad (4.17)$$

(4.16),(4.17)可写成形式

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^3\right\} g(x, t) f(x', t')|_{t=t', x=x'} = 0 \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 (f(x,t)f(x',t') + g(x, t)g(x', t'))_{t=t', x=x'} = 0 \quad (4.19)$$

将f, g的表达式(4.14),(4.15)代入(4.16),(4.17),得

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{n^c l} \hat{a}(i_1, i_2, \cdots, i_l)\hat{a}(i_{l+1}, i_{l+2}, \cdots, i_n) \cdot h_1(i_1, i_2, \cdots, i_l, i_{l+1}, \cdots, i_n) = 0, \quad n = 1, 3, 5 \cdots \leqslant N \quad (4.20)$$

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{n^c l} (-1)^l \hat{a}(i_1, i_2, \cdots, i_l)\hat{a}(i_{l+1}, i_{l+2}, \cdots, i_n) \cdot h_2(i_1, \cdots, i_l; i_{l+1}, \cdots, i_n) = 0, \quad n = 2, 4, 6, \cdots, \leqslant N \quad (4.21)$$

$$\hat{a}(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \prod_{k<l}^{(n)} \hat{a}(i_k, i_l), \quad n \geqslant 2$$
$$= 1, \qquad n = 0, 1$$

$$\hat{a}(i_k, i_l) = \frac{(p_{i_k} - p_{i_l})^2}{(p_{i_k} + p_{i_l})^2}$$

$$h_1(i_1, i_2, \cdots, i_l; i_{l+1}, \cdots, i_n) = -(p_{i_1}^3 + p_{i_2}^3 + \cdots + p_{i_l}^3 - p_{i(l+1)}^3 - \cdots - p_{i_n}^3) + (p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_l} - p_{i(l+1)} - \cdots - p_{i_n})^3$$

$$h_2(i_1, \cdots, i_l; i_{l+1}, \cdots, i_n) = (p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_l} - p_{i(l+1)} \cdots - p_{i_n})^2$$

(4.20),(4.21)能变换为

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n=\pm 1} \hat{b}(\sigma_1 p_1, \sigma_2 p_2, \cdots, \sigma_n p_n) \cdot h_1(\sigma_1 p_1, \sigma_2 p_2, \cdots, \sigma_n p_n) = 0,\ n\ \text{为奇} \tag{4.22}$$

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n=\pm 1} \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i\right) \hat{b}(\sigma_1 p_1, \sigma_2 p_2, \cdots, \sigma_n p_n) \cdot h_2(\sigma_1 p_1, \cdots, \sigma_n p_n) = 0,\ n\ \text{为偶} \tag{4.23}$$

$$\hat{b}(\sigma_1 p_1, \cdots, \sigma_n p_n) = \prod_{k<l}^{(n)} (\sigma_k p_k - \sigma_l p_l)^2$$

$$h_1(\sigma_1 p_1, \cdots, \sigma_n p_n) = -(\sigma_1 p_1^3 + \sigma_n^3 p_n^3) \cdot (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \cdots + \sigma_n p_n)^3$$

$$h_2(\sigma_1 p_1, \cdots, \sigma_n p_n) = (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \cdots + \sigma_n p_n)^2$$

恒等式(4.22)左端表示为 $D_1(p_1, \cdots, p_n)$，具有性质

(i) D_1 为对称齐次多项式，

(ii) D_1 为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的偶函数，

(iii) 如 $p_1 = p_2$，则有

$$D_1(p_1, \cdots, p_n) = 2(2p_1)^2 \prod_{m=2}^{n} (p_1^2 - p_m^2)^2 \cdot D(p_3, p_4, \cdots, p_n).$$

易知(4.22)对 $n = 1$ 成立．设 $n - 2$ 成立，则 D 为 $2n(n-1)$ 阶齐次对称多项式．另一方面，可知 D_1 为 $n(n-1) + 3$ 阶多项式，故对于固定的 $n, D_1 = 0$．同理，(4.23)成立．

对于非线性晶格方程

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a[e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}}],\ n = 1, 2;\ a, b\ \text{为常数} \tag{4.24}$$

其中，$r_n = y_n - y_{n-1}$．运用变换

$$\frac{ab}{m}(e^{-br_n} - 1) = (\log f_n)_t \tag{4.25}$$

Hirota 得到(4.24)的N个孤立子解表达式为

$$f_n(t) = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i<j}^{N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i\right] \quad (4.26)$$

其中

$$x_i = \beta_i t - k_i n + \gamma_i,\ k_i, \gamma_i \text{ 为常数}$$

$$\beta_i = \pm\left(\frac{ab}{m}\right)^{\frac{1}{2}} 2\sin\frac{k_i}{2}$$

$$e^{B_{ij}} = \frac{\dfrac{m}{ab}(\beta_i - \beta_j)^2 - 4\sinh^2\dfrac{k_i + k_j}{2}}{\dfrac{m}{ab}(\beta_i + \beta_j)^2 - 4\sinh^2\dfrac{k_i + k_j}{2}}$$

于此，$\sum\limits_{\mu=0,1}$ 表示对一切 $\mu_1 = 0, 1;\ \mu_2 = 0, 1;\cdots;\ \mu_n = 0, 1$ 可能组合求和。

对于非线性电子滤波器方程组

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1 + V_n(t)) = V_{n+1}(t) - 2V_n(t) + V_{n-1}(t) \quad (4.27)$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{dV_n}{dt} = (1 + V_n^2)(I_n - I_{n-1}) \\ \dfrac{dI_n}{dt} = (1 + I_n^2)(V_{n-1} - V_n) \end{cases} \quad (4.28)$$

Hirota 通过变换

$$V_n = [\tan^{-1} g_n/f_n]_t \quad (4.29)$$

得到(4.27)的N个孤立子解，其中 f_n，g_n 具有形式

$$f_n(t) = \sum_{\mu=0,1}^{(l)} \exp\left[\sum_{i<j}^{N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i\right]$$

$$g_n(t) = \sum_{\mu=0,1}^{(e)} \exp\left[\sum_{i<j}^{N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i\right]$$

其中

$$\alpha_i = \beta_i t - k_i n + \gamma_i$$

$$\beta_i = \pm 2\sinh \frac{k_i}{2}$$

$$e^{B_{ij}} = -\frac{(\beta_i - \beta_j)^2 - 4\sinh^2 \frac{k_i - k_j}{2}}{(\beta_i + \beta_j)^2 - 4\sinh^2 \frac{k_i + k_j}{2}}$$

$\sum\limits_{\mu=0,1}^{(l)}$，$\sum\limits_{\mu=0,1}^{(e)}$ 表示对一切 $\mu_1 = 0, 1$；$\mu_2 = 0, 1$；$\cdots$；$\mu_N = 0, 1$ 的各种可能组合求和，但对前者，要求

$$\sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i = \text{偶整数}$$

对于后者，则要求

$$\sum_{i=1}^{N(e)} \mu_i = \text{奇整数}$$

对于 Hirota 方程

$$i\varphi_t + i3\alpha|\varphi|^2\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + i\sigma\varphi_{xxx} + \delta|\varphi|^2\varphi = 0 \quad (4.30)$$

它的N个包络孤立子解具有形式

$$\varphi = g/f$$

$$f(x, t) = \sum_{\mu=0,1}{}' \exp\left[\sum_{i<j}^{2N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{2N} \mu_i x_i\right]$$

$$g(x, t) = \sum_{\mu=0,1}{}'' \exp\left[\sum_{i<j}^{2N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{2N} \mu_i x_i\right]$$

$$g^*(x, t) = \sum_{\mu=0,1}{}''' \exp\left[\sum_{i<j}^{2N} B_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{2N} \mu_i x_i\right]$$

$$x_j = k_j x - \beta_j t + \gamma_j,\ k_j,\ \gamma_j \text{ 均为常数}$$

$$\beta_j = -i\rho k_j^2 + \sigma k_j^3,\ j = 1, 2, \cdots, 2N,\ i = \sqrt{-1}$$

$$k_{j+N} = k_j^*,\ \beta_{j+N} = \beta_j^*,\ j = 1, 2, \cdots, 2N$$

其中，符号 * 表示复数共轭，且

$$B_{ij}=\log\left[\frac{\alpha}{2\sigma}(k_i+k_j)^2\right]$$

对 $i=1,2,\cdots,N$; $j=N+1,N+2,\cdots,2N$，或 $i=N+1,\cdots,2N$; $j=1,2,\cdots,N$.

$$B_{ij}=-\log\left[\frac{\alpha}{2\sigma}(k_i-k_j)^2\right]$$

对 $i=1,2,\cdots,N$; $j=1,2,\cdots,N$，或 $i=N+1,\cdots,2N$; $j=N+1,\cdots,2N$.

$\sum\limits_{\mu=0,1}'$ 表示对一切 $\mu_1=0,1$; $\mu_2=0,1$; $\cdots$; $\mu_{2N}=0,1$ 可能组合求和，要求

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i=\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}$$

$\sum\limits_{\mu=0,1}''$，$\sum\limits_{\mu=0,1}'''$ 分别表示一切 $\mu_1=0,1$; $\mu_2=0,1$; $\cdots$; $\mu_{2N}=0,1$ 可能组合求和，分别要求

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i=1+\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}$$

$$1+\sum_{i=1}^{N}\mu_i=\sum_{i=1}^{N}\mu_{i+N}$$

第五节　双线性形式的 Bäcklund 变换

我们知道，通过 Hirota 方法可将某些非线性进化方程化为双线性形式. 现考虑如下形式的双线性微分方程

$$F(D_t,D_x)f\cdot f=0 \tag{5.1}$$

并构造一个新的微分方程

$$[F(D_t,D_x)f'\cdot f']ff-f'f'[F(D_t,D_x)f\cdot f]=0 \tag{5.2}$$

显然，如果 f 为(5.1)的一个解，则由(5.2)可知 f' 为(5.1)的另一个解. 因此，(5.2)实际上给出了(5.1)关于 f', f 的 Bäcklund 变换. 以下我们以 KdV 方程为例说明之. 为此，我们还要用到以下公式，这些公式可从上面提到的 D 算子的定义及性质推得.

1) $\exp(D_1)[\exp(D_2)a\cdot b]\cdot[\exp(D_3)c\cdot d]$

$$= \exp\frac{1}{2}(D_2-D_3)\left\{\exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)+D_1\right]a\cdot d\right\}$$

$$\cdot\left\{\exp\left[\frac{1}{2}(D_2+D_3)-D_1\right]c\cdot b\right\}$$

其中，$D_i=\varepsilon_i D_x+\delta_i D_t$, ε_i, δ_i 均为常数，$i=1,2,3$.

2) $(D_x^2 a\cdot b)cd-ab(D_x^2 c\cdot d)=D_x[(D_x a\cdot d)cb + ad(D_x c\cdot b)]$

3) $(D_xD_t f'\cdot f')ff-f'f'(D_x^2 f\cdot f)=2D_x(D_t f'\cdot f)\cdot ff'$

4) $(D_x^2 f'\cdot f')ff-f'f'(D_x^2 f\cdot f)=2D_x(D_x f'\cdot f)\cdot ff'$

5) $(D_x^4 f'\cdot f')ff-f'f'(D_x^4 f\cdot f)=2D_x(D_x^3 f'\cdot f)\cdot ff' + 6D_x(D_x^2 f'\cdot f)\cdot D_x(f\cdot f')$

现考虑双线性形式的 KdV 方程

$$D_x(D_t+c_0D_x+D_x^3)f\cdot f=0 \tag{5.3}$$

其中，c_0 为常数. 设 f 为(5.3)的一个解，f' 为另一个解. 我们写出有关 f', f 的方程

$$[D_x(D_t+c_0D_x+D_x^3)f'\cdot f]ff-f'f'[D_x(D_t + c_0D_x+D_x^3)f\cdot f]=0 \tag{5.4}$$

这就是方程(5.3)的 Bäcklund 变换. 利用性质2),3),4),5), 从(5.4)可得

$$2D_x\{[D_t+(c_0+3\lambda)D_x+D_x^3]f'\cdot f\}\cdot(ff') + 6D_x[(D_x^2-\mu D_x-\lambda)f'\cdot f](D_x f\cdot f')=0 \tag{5.5}$$

其中，λ 和 μ 为任意常数，如果 f 为(5.3)的一个解，则当 f' 满

足如下方程组时，也是(5.3)的另一解。

$$[D_t + (c_0 + 3\lambda)D_x + D_x^3]f' \cdot f = 0 \tag{5.6}$$

$$(D_x^2 - \mu D_x - \lambda)f' \cdot f = 0 \tag{5.7}$$

方程(5.6),(5.7)就是(5.3)的 Bäcklund 变换。类似地我们可得到如下一些非线性的 Bäcklund 变换。

I) Boussinesq 方程

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)f \cdot f = 0 \tag{5.8}$$

$$\text{BT:} \begin{cases} (D_t + aD_x^2)f' \cdot f = 0 \\ (aD_tD_x + D_x + D_x^3)f' \cdot f = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

其中，$a^2 = -3$。

II) Kadomtsev-Petviashvili 方程

$$(D_tD_x + D_y^2 + D_x^4)f \cdot f = 0 \tag{5.10}$$

$$\text{BT:} \begin{cases} (D_y + aD_x^2)f' \cdot f = 0 \\ (-aD_yD_x + D_t + D_x^3)f' \cdot f = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

其中，$a^2 = 3$。

III) 高阶 KdV 方程

$$D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f = 0 \tag{5.12}$$

$$\text{BT:} \begin{cases} D_x^3 f' \cdot f = \lambda f' \cdot f \\ \left[D_t - (15/2)\lambda D_x^2 - \left(\frac{3}{2}\right) D_x^5\right] f' \cdot f = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

IV) 浅水波方程

$$D_x(D_t - D_tD_x^2 + D_x)f \cdot f = 0 \tag{5.14}$$

$$\text{BT:} \begin{cases} (D_x^3 - D_x)f' \cdot f = \lambda f' \cdot f \\ (3D_xD_t - 1)f' \cdot f = \mu D_x f' \cdot f \end{cases} \tag{5.15}$$

参 考 文 献

[1] R. Hirota, "Direct Methods of Finding Exact Solution of Nonlinear Evolution Equations", in "Bäcklund Transformations", Ed.

by R. M. Miura, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York Vol. **515**, (1976).
[2] J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **40** (1976), 286.
[3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 249—314.
[4] K. Sawada, T. Kotera, *Prog. Theor. Phys.*, **51** (1974), 1355.
[5] P. J. Caudrey, R. K. Dodd, J. D. Gibbon, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 351 (1976), 407.
[6] G. L. Lamb, Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43** (1971), 99.
[7] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 1386.
[8] J. Satsuma, *Prog. Theor. Phys.*, **52** (1974), 1396.
[9] H. H. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 925.
[10] M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno, *Prog. Theor. Phys.*, **53** (1975), 419.
[11] H. H. Chen, C. C. Liu, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1428.
[12] M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **38** (1975), 673.

第五章　Bäcklund 变换和无穷守恒律

第一节　Sine-Gordon 方程和 Bäcklund 变换

非线性 Klein-Gordon 方程

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+F'(\varphi)=0 \tag{1.1}$$

当 $F'(\varphi)=\varphi$ 时为 Klein-Gordon 方程；当 $F'(\varphi)=\sin\varphi$ 时，即

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0 \tag{1.2}$$

为 Sine-Gordon (SG) 方程．若 $\sin\varphi\sim\varphi$ 得KG 方程．若 $\sin\varphi\sim\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3$，即 $F(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{24}\varphi^4$，则得 φ^4 场方程

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3=0 \tag{1.3}$$

如果 $F'(\varphi)=\sin\varphi+\lambda\sin 2\varphi$，此时方程为

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi+\lambda\sin 2\varphi=0 \tag{1.4}$$

称为双重 Sine-Gordon (DSG) 方程．

在光锥坐标

$$\xi=\frac{(x-t)}{2},\ \eta=\frac{(x+t)}{2}$$

下，方程(1.2)可化为

$$\varphi_{\xi\eta}=\sin\varphi \tag{1.5}$$

SG 方程最早是从一类实际问题归结为 Gauss 曲率 $K=-1$ 的曲面几何研究中得到的，以后发现在许多物理问题中均可

归结为此类方程．例如，Jesephson 结的涡旋线的传播问题，在一般超导结的研究中，Jesephson 发现流过超导结的电流满足以下关系：

$$J = J_0 \sin\varphi,\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar}v$$

其中，v 为电压，$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 为二块超导波函数的位相差．我们可得到 φ 满足如下的 Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - LC\varphi_{tt} = \frac{2eLJ_0}{\hbar}\sin\varphi$$

其中，L，C，e，J_0，$\hbar$ 均为物理常数．其他有关的物理问题有：晶体的位错问题，磁化方向产生的波在铁磁物质中的传播等．

我们容易得到 SG 方程(1.2)的行波解．设 $\varphi = \Phi(\xi)$，$\xi = x - Dt$，$D = \text{const} > 0$，则(1.2)为

$$(D^2 - 1)\Phi_{\xi\xi} + \sin\Phi = 0 \tag{1.6}$$

乘以 Φ_ξ 并积分得

$$\frac{1}{2}(D^2 - 1)\Phi_\xi^2 + 2\sin^2\frac{1}{2}\Phi = A \tag{1.7}$$

其中，A 为积分常数．由此我们可得(1.2)的孤立波解和周期波列解．当 $A = 0$，$D^2 - 1 < 0$ 时，有

$$\text{tg}\,\Phi/4 = \pm\exp\{\pm(1 - D^2)^{-\frac{1}{2}}(\xi - \xi_0)\}$$

或

$$\Phi = 4\text{tg}^{-1}\pm\{\pm(1 - D^2)^{-\frac{1}{2}}(x - Dt)\}(\text{取 } \xi_0 = 0) \tag{1.8}$$

即为(1.2)的孤立波解．周期波列解为

1) $0 < A < 2$，$D^2 - 1 > 0$，这时为周期解，Φ 关于 $\Phi = 0$ 在 $-\Phi_0 < \Phi < \Phi_0$ 之间振荡，$\Phi_0 = 2\sin^{-1}\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$．

2) $0 < A < 2$，$D^2 - 1 < 0$，这时仍为周期解，Φ 关于 $\Phi = \pi$ 在 $\pi - \Phi_0 < \Phi < \pi + \Phi_0$ 之间振荡．

3) $A < 0$, $D^2 - 1 < 0$, 这时为螺旋波

$$\Phi_\xi = \pm \left\{\frac{2}{1-D^2}\left(|A| + 2\sin^2\frac{1}{2}\Phi\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

4) $A > 2$, $D^2 - 1 > 0$, 也有螺旋波

$$\Phi_\xi = \pm \left\{\frac{2}{(D^2-1)}\left(A - 2\sin^2\frac{1}{2}\Phi\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

5) $A = 2$, $D^2 - 1 > 0$, 有解

$$\tan\left(\frac{\Phi+\pi}{4}\right) = \exp\{\pm(D^2-1)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_0)\}$$

此时表示 $\Phi = -\pi$ 到 $\Phi = \pi$ 的扭结.

Lamb[9] 用 Bäcklund 变换（BT）具体求解了 SG 方程的孤立子解. 如我们所知，Bäcklund 变换是一类未知函数变换关系式,对于(1.5)式我们引入 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + 2\lambda\sin\left(\dfrac{\varphi+\varphi'}{2}\right) \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \dfrac{2}{\lambda}\sin\left(\dfrac{\varphi'-\varphi}{2}\right) \end{cases} \tag{1.9}$$

此处 λ 为任意参数. 我们从(1.9)式的第一式对 η 微商，第二式对 ξ 微商,利用 φ' 二阶微商的一致性和原方程 $\varphi_{\xi\eta} = \sin\varphi$，不难得到新方程 $\varphi'_{\xi\eta} = \sin\varphi'$，它和旧方程形式完全一样,于是我们可用 BT（1.9）逐次求出新解. 首先可取平凡解 $\varphi = 0$，另一个解 φ_1 可依 BT(1.9) 求得

$$\varphi_1 = 4\text{tg}^{-1}\left[\exp\left(\pm\frac{x-Dt}{\sqrt{1-D^2}}\right)\right], \quad D = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \tag{1.10}$$

φ_1 正是 SG 方程的一个孤立子解.

从上面我们看到了 SG 方程的孤立子解(1.10)是由零解从 BT (1.9)得到的. 一般来说,对于 SG 方程，B 变换总是使孤立子解从无中生有，从 N 个孤立子解变换为 $N+1$ 个孤立子解. 不仅如此，利用所谓“可换性定理”，我们可从现有的

几组解出发，不必去积分方程组(1.9)，只须通过代数运算，就可得到新的解. 这条"可换性定理"说："从方程(1.5)的最初的解 φ_0 出发，不论是先进行参数为 λ_1 的变换(1.9)，然后再进行参数为 λ_2 的变换，还是反过来先进行参数为 λ_2 的变换，然后再进行参数为 λ_1 的变换，最后所得的解 φ_3 都是一样的". 由可换性定理，可以导出方程(1.5)解的一个"非线性迭加公式".

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4}\right)=\frac{D_1+D_2}{D_1-D_2}\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4}\right) \tag{1.11}$$

特别取 $\varphi_0=0$，此时 φ_1，φ_2 如(1.10)所示，代入(1.11)可得(1.5)的双重孤立子解 (Perring-Suyrme 解)

$$\operatorname{tg}\varphi/4=\frac{\operatorname{sh}(x/\sqrt{1-D^2})}{\operatorname{ch}(Dt/\sqrt{1-D^2})} \tag{1.12}$$

它表示两扭的迭加；又

$$\operatorname{tg}\varphi/4=\frac{\operatorname{sh}(Dt/\sqrt{1-D^2})}{D\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-D^2})} \tag{1.13}$$

它表示一个正扭和一个反扭的碰撞. 在此式中令 $D=ib$，又可得(1.5)的另一种孤立子解

$$\operatorname{tg}\varphi/4=\frac{\sin(bt\sqrt{1+b^2})}{\operatorname{ch}(x/\sqrt{1+b^2})} \tag{1.14}$$

它的图象为正扭与反扭周期地接近又离开，往返一起相对地振动，称为"呼吸子".

我们现将上述利用 B 变换求 SG 方程的孤立子解的过程一般化. 设方程(1.5)通过 B 变换

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\varphi_{ix}-\varphi_{i-1,x})=a_i\sin\dfrac{1}{2}(\varphi_i+\varphi_{i-1})\\[2mm] \dfrac{1}{2}(\varphi_{it}-\varphi_{i-1,t})=-\dfrac{1}{a_i}\sin\dfrac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\end{cases} \tag{1.14$'$}$$

及 $\varphi_0 = 0$，可将(1.5)的特解 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 求出. 在适当的初始条件下，(1.5)的四个解由二个参数 a_k，a_j 联系起来：

$$\begin{cases}\varphi_{k,j+1} = B_{a_j}\varphi_{kj} \\ \varphi_{k+1,j} = B_{a_k}\varphi_{kj} \\ \varphi_{k+1,j+1} = B_{a_j}B_{a_k}\varphi_{kj} = B_{a_k}\cdot B_{a_j}\varphi_{kj}\end{cases} \tag{1.15}$$

其中，B_{a_j} 为具参数 a_j 的 B 变换. B 变换可交换的图形如图 5-1 所示.

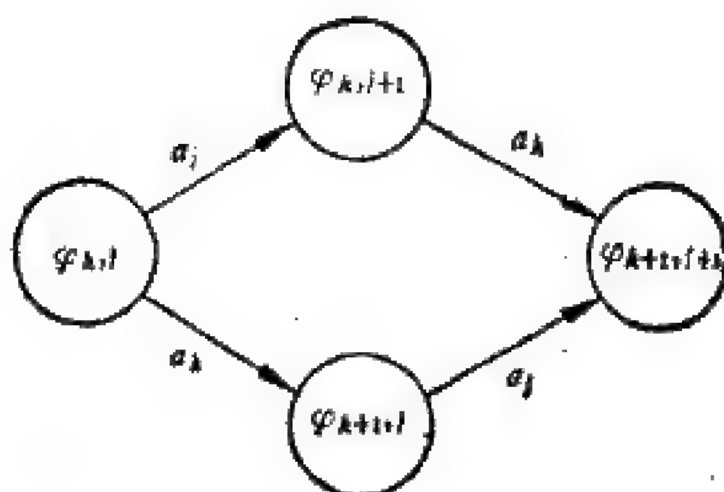


图 5-1

由此可得 Sine-Gordon 方程的N个孤立子解. 解的分析表达式如下：

1) 当 $j > 0$ 时，$\varphi_{j+1,j} = 0$；

$$\varphi_{j,j} = 4\mathrm{tg}^{-1}\left[e^{-k_j x+\left(\frac{1}{k_j}\right)t+\gamma_{jj}}\right]，\gamma_{jj} \text{ 为常数，}$$

$$(-1)^j/k_j < 0, \tag{1.16}$$

2) 当 $j > l$ 时，

$$\varphi_{l,j} = \varphi_{l+1,j-1} + 4\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{k_j}-\frac{1}{k_l}}{\frac{1}{k_j}+\frac{1}{k_l}}\right]\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi_{l,j-1}-\varphi_{l+1,j}}{4}\right)$$

$$(-1)^l\cdot\frac{1}{k_l} < (-1)^j\frac{1}{k_j} \tag{1.17}$$

由此可知，为了得到N个孤立子解的表达式，必须有小于N的所有孤立子解的表达式，其求解示意图如图 5-2 所示。

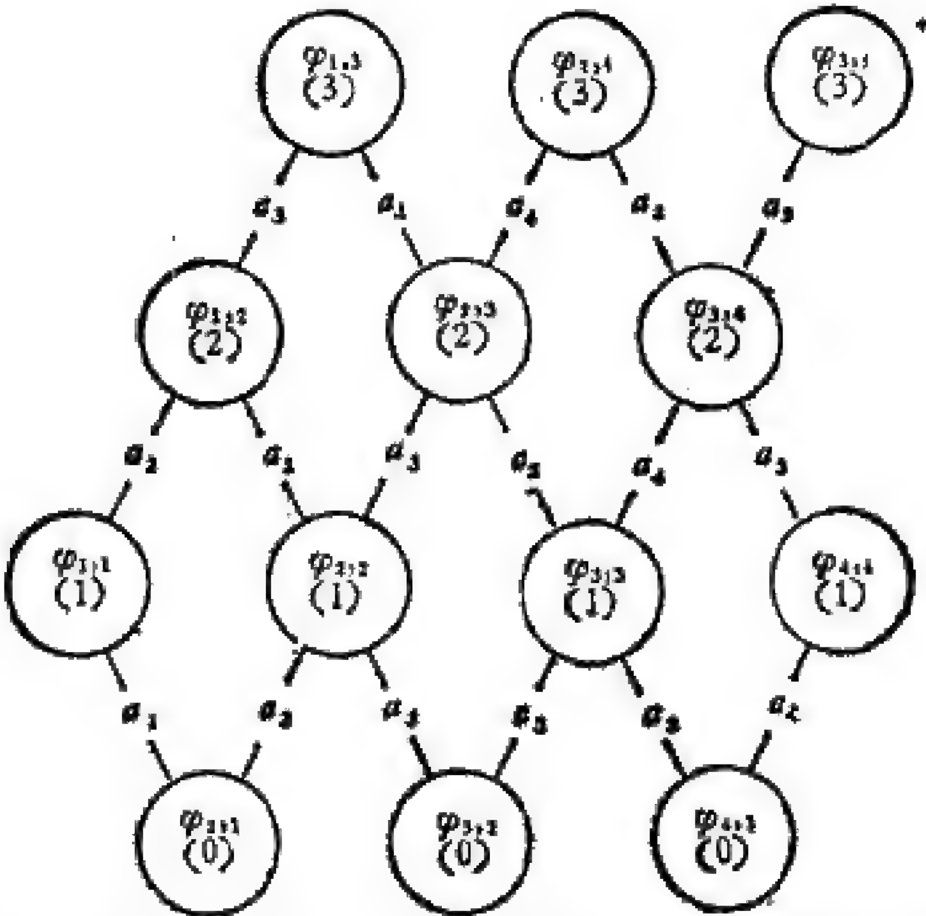


图 5-2　N个孤立子的 Lamb 图．括号内的数目表示孤立子的数目．

第二节　一类非线性进化方程的 Bäcklund 变换

我们在上一节已介绍了 SG 方程的B变换，其实不仅 SG 方程存在B变换，而且相当一大批非线性进化方程均存在相应的B变换，它实际上是和接触变换相平行的一类关于未知函数之间的变换．设变换 $z(x, y) \to z'(x', y')$ 满足微分关系式

$$\begin{cases} P = f(x', y', z', p', q') \\ q = g(x', y', z', p', q') \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$p = \frac{\partial z}{\partial x}$，$q = \frac{\partial z}{\partial y}$，$p' = \frac{\partial z'}{\partial x'}$，$q' = \frac{\partial z'}{\partial y'}$（类似记 $r =$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$以及 r', s', t' 等). 我们以下设 $x=x'$, $y=y'$. 由 z 的可积条件 $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$, 可得

$$\Omega = f_{y'} - q_{x'} + f_{z'}q' - q_{z'}p' + (f_{p'} - g_{q'}) + f_{q'}t' + g_{p'}r' = 0 \tag{2.2}$$

这个可积条件在二种情况下是满足的：或者它恒等于零，即

$$f_{p'} - g_{q'} = f_{q'} = g_{p'} = 0$$

$$f_{y'} - g_{x'} + f_{z'}q' - q_{z'}p' = 0$$

或者由 $\Omega=0$ 导致二阶 Monge-Ampere 方程. 前者导致接触变换，后者导致 B 变换. 我们由 B 变换可得到该方程的散射反演特征值问题的方程组，在某些情况下，还能得到它的无穷多个守恒律. 我们分别举例叙述如下：

1) SG 方程

$$S = \sin z \tag{2.3}$$

它的 B 变换为

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(p-p') = a\sin\left[\frac{1}{2}(z+z')\right]\\ \frac{1}{2}(q+q') = a^{-1}\sin\left[\frac{1}{2}(z-z')\right]\end{cases} \tag{2.4}$$

如令 $\Gamma=\tan[(z'+z')/4]$, 则由(2.4)可得

$$\Gamma_x + a\Gamma - \frac{1}{2}p(1+\Gamma^2) = 0 \tag{2.5}$$

我们知道 Riccati 方程

$$\Gamma_x + 2P\Gamma + Q\Gamma^2 + R = 0 \tag{2.6}$$

它等价于方程组

$$\begin{cases}w_{1x} + Pw_1 = -Rw_2\\ w_{2x} - Pw_2 = Qw_1\end{cases} \tag{2.7}$$

其中，$\Gamma = w_1/w_2$. 因此(2.5)等价于方程组

$$
\begin{cases}
w_{1x} + \dfrac{1}{2} a w_1 = \dfrac{1}{2} p w_2 \\
w_{2x} - \dfrac{1}{2} a w_2 = -\dfrac{1}{2} p w_1
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

此即 SG 方程(2.3)式所对应的散射反演法中的二分量的特征值问题方程组.

由 B 变换(2.4),取 a 很小，我们可得到(2.3)的无穷多个守恒律. 事实上,设 $z'(x, y, a)$ 具有形式

$$
z'(x, y, a) \approx \sum_{j=0}^{\infty} z_j'(x, y) a^j, \quad a \to 0 \tag{2.9}
$$

将(2.9)代入(2.4),可得

$$
\sum_{j=0}^{\infty} z_{jy}' a^j = z_y + \frac{2}{a} \sin\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j' a^j - z\right)\right]
$$

当 $a \to 0$, 有 $z_0' = z$, $z_1' = 2z_y$, 由 a 的高次幂系数相等,可得

$$
\begin{cases}
z_2' = 2z_{yy} \\
z_3' = 2z_{yyy} + \dfrac{1}{3}(z_y)^3 \\
z_4' = 2z_{yyyy} + 2(z_y)^2 z_{yy} \\
z_5' = 2z_{yyyyy} + 3(z_y)^2 z_{yyy} + 5z_y(z_{yy})^2 + \dfrac{3}{20}(z_y)^5
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

我们已知道(2.3)式可写成能量守恒形式

$$
\frac{1}{2}(z_x'^2)_y + (\cos z' - 1)_x = 0 \tag{2.11}
$$

将(2.10)代入 (2.11), 由 a 的幂相等即可得到无穷多个守恒律. 以下写出几项守恒密度

$$
T_0 = \frac{1}{2} z_x^2
$$

$$T_1 = 2z_{yyyx}z_x + 4z_{yyx}z_{yx} + z_y^2 z_{yx} z_x$$

$$\begin{aligned} T_2 = & 2z_{yyyyyx}z_x + 4z_{yyyyx}z_{yx} + 4z_{yyx}z_{yyyx} \\ & + 6z_{yyy}z_y z_x z_{yx} + 3z_{xyyy}z_y^2 z_x \\ & + 10z_{yyx}z_{yy}z_y z_x + 5z_{yy}^2 z_{yx} z_x + 8z_{yy}z_{yx}^3 z_y \\ & + 8z_y^2 z_{yx} z_{yyx} + \frac{3}{4} z_y^4 z_{yx} z_x + \cdots \end{aligned}$$

2）KdV 方程

$$u_y + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.12}$$

令 $z = \int_{-\infty}^{x} u(x', y)dx'$，由(2.12)得到 z 满足的方程为

$$q + 3p^2 + \alpha = 0, \quad \alpha = z_{xxx} \tag{2.13}$$

设(2.12)的 B 变换为

$$\begin{cases} p = f(z, z', p') \\ q = \varphi(z, z', q', r, r', p, p') \end{cases} \tag{2.14}$$

因为

$$r = f_z f + f_{z'} p' + f_{p'} r' \tag{2.15}$$

代入(2.14)式的第二式得

$$q = \varphi(z, z', q', p', r') \tag{2.16}$$

z 的二阶混合导数能写成

$$\frac{dp}{dy} = f_z q + f_{z'} q' + f_{p'} s'$$

或

$$\frac{dq}{dx} = \varphi_z p + \varphi_{z'} p' + \varphi_{q'} s' + \varphi_{p'} r' + \varphi_{r'} \alpha'$$

由于要求这些混合导数相等和 z' 满足同一方程(2.13)，因此可定义函数 $\Omega(z, z', p, p', q, q', r', s')$ 使得

$$\begin{aligned} \Omega = & (f_{p'} - \varphi_{q'})s' + f_z q + f_{z'} q' - \varphi_z p - \varphi_{z'} p' \\ & - \varphi_{p'} r' + \varphi_{r'}(q' + 3p'^2) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

选取 $\Omega_{s'} = f_{p'} - \varphi_{q'} = 0$ 及 f 与 q', r' 无关，得

$$\varphi_{q'q'} = \varphi_{q'r'} = 0 \tag{2.18}$$

$$\Omega_{q'} = f_{p'}f_z + f_{z'} - ff_{p'z} - p'f_{p'z'} - r'f_{pp'} + \varphi_{r'} = 0$$

由 $\Omega_{q'r'} = -f_{p'p'} + \varphi_{r'r'} = 0$，有

$$f_{p'p'} = \varphi_{r'r'} = a(z, z', r') \tag{2.19}$$

其中，$a(z, z', r')$ 待定。因为

$$\Omega_{r'r'r'} = -3f_{p'p'p'} = 0 \tag{2.20}$$

及由(2.18),(2.19)可写成

$$f(z, z', p') = b(z, z')p' + c(z, z')$$

$$\varphi(z, z', q', p', r') = b(z, z')q' + \lambda(z, z', p')r' + v(z, z', p') \tag{2.21}$$

以下定出 λ, c, v。由(2.17)有

$$\Omega_{r'r'} = -2\varphi_{r'p'} = 0$$

故 λ 与 p' 无关。且因 $\Omega_{p'p'p'} = 0$，于是可得

$$v(z, z', p') = v_2(z, z')p'^2 + v_1(z, z')p' + v_0(z, z') \tag{2.22}$$

可设 $b(z, z')$ 为常数,于是得到

$$\begin{cases} p = bp' + c \\ q = bq' + \lambda r' + v_2 p'^2 + v_1 p' + v_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

其中，b 为常数，c, λ 与 $v_i(i = 0, 1, 2)$ 均为 z, z' 的待定函数。将(2.23)代入 Ω，由于 r', p', q' 在 Ω 中为独立无关，因此得到以下七个方程确定五个未知函数和一个常数 b。

$$2v_2 = -(b\lambda_z + \lambda_{z'}) \tag{2.24}$$

$$\lambda = -(bc_z + c_{z'}) \tag{2.25}$$

$$v_1 = \lambda c_z - c\lambda_z \tag{2.26}$$

$$v_2 c_z - cv_{2z} + 3\lambda - bv_{1z} - v_{1z'} = 0 \tag{2.27}$$

$$v_1 c_z - cv_{1z} - v_{0z'} - bv_{0z} = 0 \tag{2.28}$$

$$bv_{2z} + v_{2z'} = 0 \tag{2.29}$$

$$v_0 c_z - cv_{0z} = 0 \tag{2.30}$$

由于 z 必须满足方程(2.13),及由(2.23)计算三阶导数得

$$\alpha - b\alpha' - \lambda r' + 2v_2 p'^2 + p'[2bcc_{zz} + 2cc_{zz'} + c_z(bc_z + c_{z'})] + c^2 c_{zz} + cc_z^2 = 0 \tag{2.31}$$

$$v_2 - b + b^2 = 0 \tag{2.32}$$

$$bc_{zz} + 2b + c_{zz'} = 0 \tag{2.33}$$

$$c^2 c_{zz} + cc_z^2 + v_0 + 3c^2 = 0 \tag{2.34}$$

由 (2.30) 推出 v_0, $v_0 = \phi(z')c(z, z')$, 于此 $\phi(z')$ 待定, (2.34)积分一次得

$$c_z^2 + 2c + \phi + Kc^{-2} = 0 \tag{2.35}$$

取 $K = 0$, 由(2.35) $c_{zz} = -1$, 从 (2.33) 得 $c_{zz'} = -b$. 再从(2.32)加上(2.24),(2.25)得

$$c_{z'z'} = 2b + b^2 \tag{2.36}$$

将(2.36)积分得

$$c(z, z') = m - \frac{1}{2}[z^2 + 2bzz' - b(2 + b)z'^2] + kz + lz'$$

其中 k, l, m 为积分常数. 设 $m \neq 0$, $k = l = 0$, 从(2.24)—(2.30)得

$$\lambda = 2b(z - z')$$
$$v_1 = -2bm - b(z^2 - 2zz' + b^2 z'^2)$$
$$v_2 = b - b^2$$
$$\phi = -2m - 2b(1 + b)z'^2$$

再由 $b = -1$, 最后可得 KdV 方程(2.12)的 B 变换为

$$\begin{cases} p + p' = m - \dfrac{1}{2}(z - z')^2 \\ q + q' = (z - z')(r - r') - 2(p^2 + pp' + p'^2) \end{cases} \tag{2.37}$$

从 $z' = 0$ 为 KdV 方程的解,由(2.37)可得

$$\begin{cases} p = m - \frac{1}{2} z^2 \\ q = zr - 2p^2 = -2mp \end{cases}$$

这方程的解为

$$z = (2m)^{\frac{1}{2}} \tanh \left[\left(\frac{m}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (x - 2my) \right]$$

$$u = p = m \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{m}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (x - 2my) \right] \quad (2.38)$$

为 KdV 方程(2.12)的解. 若置 $\Gamma = z - z'$, 由(2.37)得

$$\Gamma_x - \frac{1}{2} \Gamma^2 + (m - 2p) = 0$$

等价方程组为

$$\begin{cases} v_{1x} = (2p - m) v_2 \\ v_{2x} = -\frac{1}{2} v_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

3) MKdV 方程

$$u_y + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.40)$$

由积分即有

$$q + 3p^2 + \alpha = 0$$

类似于对上述的 KdV 方程所进行的步骤,可得 MKdV 方程(2.40)的 B 变换为

$$\begin{cases} p = bp' + a \sin v \\ q = bq' - 2a \left[br' \cos v + p'^2 \sin v + \frac{1}{2} a(p + bp') \right] \end{cases} \quad (2.41)$$

其中, $b = \pm 1$.

若令 $\Gamma = \tan \left[\frac{1}{2} (z + bz') \right]$, 可得

$$\Gamma_x + a\Gamma - p(1 + \Gamma^2) = 0$$

它等价于(2.40)散射问题特征方程组

$$\begin{cases} w_{1x} + \frac{1}{2} a w_1 = p w_2 \\ w_{2x} - \frac{1}{2} a w_2 = p w_1 \end{cases} \tag{2.42}$$

4）非线性 Schrödinger 方程

非线性 Schrödinger 方程的复数共轭形式为

$$\begin{cases} iq + r + z^2\bar{z} = 0 \\ -i\bar{q} + \bar{r} + \bar{z}^2 z = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

其中"—"表示复数共轭，则可得它的 B 变换为

$$\begin{cases} p = p' - \frac{1}{2} i w \tau + i k v \\ q = q' + \frac{1}{2}\tau(p + p') - k_n + \frac{1}{4} i v(|w|^2 + |v|^2) \end{cases} \tag{2.44}$$

其中，$w = z + z'$，$v = z - z'$，$\tau = \pm i(b - 2|v|^2)^{\frac{1}{2}}$，$n$，$b$，$k$ 为任意实常数.

令 $\Gamma = (b - 2|v|^2)^{\frac{1}{2}}/\sqrt{2}\, y$，从(2.44)有

$$z[\Gamma_x + ik\Gamma + \tau^{-\frac{1}{2}}(z\Gamma^2 + \bar{z})] = z'[\Gamma_x + ik\Gamma + \tau^{-\frac{1}{2}}(z'\Gamma^2 + z^{-1})]$$

等价方程组为

$$\begin{cases} w_{1x} + \frac{1}{2} i k w_1 = -\tau^{-\frac{1}{2}}\bar{z} w_2 \\ w_{2x} - \frac{1}{2} i k w_1 = \tau^{-\frac{1}{2}} z w_1 \end{cases} \tag{2.45}$$

第三节 KdV 方程的 B 变换可换性

定理设有 KdV 方程

$$u_y + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

我们已知方程(3.1)在 BT

$$B_\beta u': \begin{cases} u_x = \beta - u'_x - \dfrac{1}{2}(u - u')^2 \\ u_y = -u'_y + (u - u')(u_{xx} - u'_{xx}) \\ \qquad - 2[u_x^2 + u_x u'_x + u'^2_x] \end{cases} \tag{3.2}$$

下是不变的,其中 β 为任意的 Bäcklund 变换参数。从(3.1)积分易得

$$u_y + 3u_x^2 + u_{xxx} = 0 \tag{3.3}$$

我们有如下的定理

定理 1 如 $u_{\beta_i} = B_{\beta_i} u_0 (i = 1, 2)$ 为方程(3.3)的解,且是从已知解 u_0 出发、参数为 β_i 的 BT 生成的,则我们可得到(3.3)的新解 φ,

$$\varphi = u_0 + 2(\beta_1 - \beta_2)/(u_{\beta_1} - u_{\beta_2}) \tag{3.4}$$

其中,$\varphi = B_{\beta_1} B_{\beta_2} u_0 = B_{\beta_2} B_{\beta_1} u_0$。

证 事实上,我们有

$$u_{0x} + u_{\beta_1,x} = \beta_1 - \frac{1}{2}(u_0 - u_{\beta_1})^2 \tag{3.5}$$

$$u_{0x} + u_{\beta_2,x} = \beta_2 - \frac{1}{2}(u_0 - u_{\beta_2})^2 \tag{3.6}$$

$$u_{\beta_1,x} + u_{\beta_1\beta_2,x} = \beta_2 - \frac{1}{2}(u_{\beta_1} - u_{\beta_1\beta_2})^2 \tag{3.7}$$

$$u_{\beta_2,x} + u_{\beta_2\beta_1,x} = \beta_1 - \frac{1}{2}(u_{\beta_2} - u_{\beta_2\beta_1})^2 \tag{3.8}$$

其中,$u_{\beta_1\beta_2} = B_{\beta_2} B_{\beta_1} u_0$,$u_{\beta_2\beta_1} = B_{\beta_1} B_{\beta_2} u_0$。如果设 $\varphi = u_{\beta_1\beta_2} = u_{\beta_2\beta_1}$,则由(3.5),(3.6)和(3.7),(3.8),可得

$$u_{\beta_2 x} - u_{\beta_1 x} = \beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{2}(u_{\beta_1} - u_{\beta_2})(2u_0 - u_{\beta_1} - u_{\beta_2}) \tag{3.9}$$

$$u_{\beta_1 x} - u_{\beta_2 x} = \beta_2 - \beta_1 + \frac{1}{2}(u_{\beta_2} - u_{\beta_1})(u_{\beta_1} + u_{\beta_2} - 2\varphi) \tag{3.10}$$

于是由(3.9)减去(3.10)，即得

$$\varphi = u_0 + 2(\beta_1 - \beta_2)/(u_{\beta_1} - u_{\beta_2})$$

容易验证(3.4)的确是(3.3)的解.

类似地，MKdV 方程

$$v_y + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{3.11}$$

在 Bäcklund 变换

$$B_\beta u': \begin{cases} u_x = \alpha u'_x + \beta \sin(u + \alpha u') \\ u_y = \alpha u'_y - \beta[2\alpha u'_{xx} \cos(u + \alpha u') + 2u'^2_x \sin(u \\ \qquad + \alpha u') + \beta(u_x + \alpha u'_x)], \quad \alpha = \pm 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

是不变的，其中，β 为任意 Bäcklund 参数. 我们有定理

定理 2 如果 $u_{\beta_i}(i = 1, 2)$ 表示(3.11)的解且是从解 u_0 出发由 Bäcklund 变换(3.12)，$\beta = \beta_i(i = 1, 2)$ 生成的，则新的解可表为

$$\tan\left(\frac{\varphi - u_0}{2}\right) = \alpha\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right)\tan\left(\frac{u_{\beta_1} - u_{\beta_2}}{2}\right) \tag{3.13}$$

其中，$\varphi = B_{\beta_1} B_{\beta_2} u_0 = B_{\beta_2} B_{\beta_1} u_0$.

例 设 $u_0 = 0$，由(3.12)可得

$$u_{\beta_i} = 2\tan^{-1} e^{\mu_i} \tag{3.14}$$

其中

$$\mu_i = \beta_i x - \beta_i^3 y + \gamma_i \tag{3.15}$$

$\gamma_i(i = 1, 2)$ 为积分常数，则由交换性定理(3.13)可得新解

$$\varphi = \pm 2\tan^{-1}\left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right)\frac{\sinh\left\{\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\right\}}{\cosh\left\{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right\}}\right] \tag{3.16}$$

第四节　高阶 KdV 方程和高维 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换

Sawada 和 Kotera[22] 提出了如下的高阶 KdV 方程

$$u_t + 180u^2u_x + 30(uu_{xxx} + u_xu_{xx}) + u_{xxxxx} = 0 \quad (4.1)$$

容易得到方程(4.1)的双线性形式方程为

$$D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f = 0 \quad (4.2)$$

Sawada 和 Kaup[23] 构造的(4.2)的 BT 为

$$\left(D_t - \frac{15}{2}\beta D_x^2 - \frac{3}{2}D_x^5\right)f' \cdot f = 0 \quad (4.3)$$

$$(D_x^3 - \beta)f' \cdot f = 0 \quad (4.4)$$

其中，β 为 Bäcklund 变换参数．为证明这一点，我们仅需证明当(4.3)，(4.4)成立时，即有

$$P \equiv f' \cdot f' D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f - ff D_x(D_t + D_x^5)f' \cdot f' = 0 \quad (4.5)$$

实际上，由第四章 D 算子性质，易知

$$P = D_x\left[2(f' \cdot f)(D_tf' \cdot f) + \frac{3}{4}(f'f) \cdot (D_x^5f' \cdot f)\right.$$
$$- \frac{15}{4}(D_xf' \cdot f) \cdot (D_x^4f' \cdot f)$$
$$\left.+ \frac{15}{2}(D_x^2f' \cdot f) \cdot (D_x^3f' \cdot f)\right]$$
$$+ \frac{5}{4}D_x^3[(f'f) \cdot (D_x^3f' \cdot f) - 3(D_xf' \cdot f)$$
$$\cdot (D_x^2f' \cdot f)]$$

进一步可化为

$$P = D_x[2(f' \cdot f)(D_tf' \cdot f) - 3(f'f) \cdot (D_x^5f' \cdot f)$$
$$+ 15(D_x^2f' \cdot f) \cdot (D_x^3f' \cdot f)] + 5D_x^3(f' \cdot f)$$

$$\cdot (D_x^2 f' \cdot f) \tag{4.6}$$

再将 Bäcklund 关系式(4.3),(4.4)代入(4.6),即得

$$P = D_x[15\beta(f' \cdot f) \cdot (D_x^2 f' \cdot f) + 15\beta(D_x^2 f' \cdot f) \cdot (f'f)] = 0 \tag{4.7}$$

现考虑如下三维 Sine-Gordon 方程

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \sin u \tag{4.8}$$

Liebbrandt 和 Christiansen 指出方程 (4.8) 具有 Bäcklund 变换为

$$\left\{I \frac{\partial}{\partial x^1} + i\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x^2} + i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial t}\right\} \left\{\frac{\alpha - i\beta}{2}\right\} = \exp[i\theta\sigma_1 \exp[(-i\varphi\sigma_2)\exp(-\tau\sigma_1)]] \cdot \sin\left\{\frac{\alpha + i\beta}{2}\right\} \tag{4.9}$$

其中，σ_1，σ_2，σ_3 为 pauli spin 矩阵，I 为 2×2 恒等矩阵. 实的 Bäcklund 参数 (θ, φ, τ) 囿于区域:

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$-\infty < \tau < \infty$. 而实函数 α，β 分别满足

$$\left\{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}$$

$$\alpha(x^1, x^2, x^3, t) = \sin\alpha(x^1, x^2, x^3, t) \tag{4.10}$$

$$\beta(x^1, x^2, x^3, t) = \sinh\beta(x^1, x^2, x^3, t) \tag{4.11}$$

(4.9)式可改写为

$$\left\{I \frac{\partial}{\partial x^1} + iP\right\} \left\{\frac{\alpha - i\beta}{2}\right\} = [A_1 + iA_2] \sin\left\{\frac{\alpha + i\beta}{2}\right\} \tag{4.12}$$

其中

$$\begin{cases} p = \sigma_1 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \sigma_3 \dfrac{\partial}{\partial x^3} - i\sigma_2 \dfrac{\partial}{\partial t} \\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.13}$$

和

$$\begin{cases} A_1 = I\cos\theta \\ A_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi\cosh\tau & (\cos\varphi - \sin\varphi\sinh\tau)\sin\theta \\ (\cos\varphi + \sin\varphi\sinh\tau)\sin\theta & -\sin\theta\sin\varphi\cosh\tau \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.14}$$

将(4.12)式分为实部和虚部可得

$$I\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\alpha}{2}\right\} + P\left\{\frac{\beta}{2}\right\} = A_1\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) - A_2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{4.15}$$

$$P\left\{\frac{\alpha}{2}\right\} - I\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{\beta}{2}\right\} = A_1\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) + A_2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{4.16}$$

我们可构造(4.10),(4.11)最简单的非平凡解．先取 $\beta = \beta_0 = 0$，再取 $\alpha = \alpha_0 = 0$ 于(4.15),(4.16)中,可得

$$\alpha_1(x^1, x^2, x^3; \theta, \varphi, \tau) = 4\tan^{-1}\{a_0\exp R\} \tag{4.17}$$

$$\beta_1(x^1, x^2, x^3; \theta, \varphi, \tau) = \begin{cases} 4\tan^{-1}\{a_1\exp R\}, & R \leqslant 0 \\ 4\cosh^{-1}\{a_1\exp R\}, & R > 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

其中

$$R = x^1\cos\theta + x^2\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi \cdot (x^3\cosh\tau + t\sinh\tau) \tag{4.19}$$

$a_i(i=0,1)$ 均为积分常数。 解(4.17)表示方程(4.10)的单孤立解,而β解(4.18)则缺乏孤立子的特征。

第五节 Benjamin-Ono 方程的 Bäcklund 变换

描写内深水波传播的 Benjamin-Ono 方程

$$u_t + 2uu_x + H[u_{xx}] = 0 \tag{5.1}$$

的 Bäcklund 变换容易得到,其中,H为 Hilbert 变换算子,它由柯西主值积分

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

确定。我们首先找出 BO 方程(5.1)的双线性表示,令

$$u(x,t) = i\frac{\partial}{\partial x}(\log[f'/f]) \tag{5.2}$$

其中

$$f \propto \prod_{n=1}^{N}(x - z_n(t)),\quad f' \propto \prod_{n=1}^{N}(x - z'_n(t)) \tag{5.3}$$

z_n, z'_n 是复的,且 $\operatorname{Im} z_n > 0$, $\operatorname{Im} z'_n < 0, \forall n, N \in Z^+$。依此

$$u = i\left(\frac{f'_x}{f'} - \frac{f_x}{f}\right) = i\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{x - z'_n} - \frac{1}{x - z_n}\right\} \tag{5.4}$$

因此

$$Hu = \frac{i}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-x)} \cdot \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{z - z'_n} - \frac{1}{z - z_n}\right\} dz \tag{5.5}$$

为了计算(5.5),取围道C如图 5-3,由留数定理得

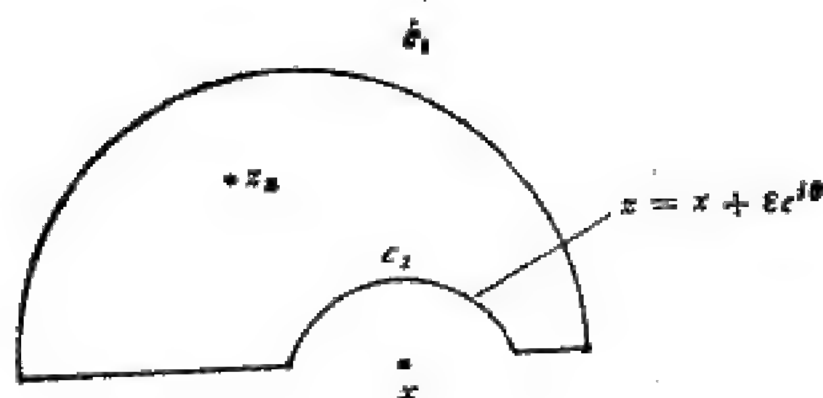


图 5-3

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(z-x)}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz=\text{res}\,(z=z_n)$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{1}{z-x}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{1}{z-x}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z-x}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz$$
$$=\frac{1}{x-z_n}$$

$$\frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-x}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz$$
$$=\frac{1}{x-z_n}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}$$
$$\cdot\int_{c_2}\frac{1}{z-x}\left[\frac{1}{z-z_n'}-\frac{1}{z-z_n}\right]dz$$
$$=\frac{1}{x-z_n}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{0}\varepsilon^{-1}e^{-i\theta}\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{1}{x+\varepsilon e^{i\theta}-z_n'}-\frac{1}{x+\varepsilon e^{i\theta}-z_n}\right]\varepsilon i e^{i\theta}d\theta\right\}$$

即有

$$\left[\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot f'(x,t)f(x',t')\right]_{x'=x,t'=t}=0$$

即

$$(iD_t-D_x^2)f'\cdot f=0 \tag{5.10}$$

于是我们推出如 f', f 由(5.3)确定，且(5.10)成立，则由(5.2)所定义的函数 u 是 BO 方程的解.

设 (f, f') 是(5.10)的一对解，而 (g, g') 为由类似的方法引进的 Bäcklund 关系式

$$(iD_t-2i\lambda D_x-D_x^2-\mu)f\cdot g=0 \tag{5.11}$$

$$(iD_t-2i\lambda D_x-D_x^2-\mu)f'\cdot g'=0 \tag{5.12}$$

$$(D_x+i\lambda)f\cdot g'=i\nu f'g \tag{5.13}$$

所确定，其中，λ, μ, ν 为任意参数. 可以证明 g 和 g' 满足方程

$$(iD_t-D_x^2)g'\cdot g=0 \tag{5.14}$$

事实上，只需证明由方程(5.10)—(5.13)推出

$$P=g'g(iD_t-D_x^2)f'\cdot f-f'\cdot f(iD_t-D_x^2)g'\cdot g=0 \tag{5.15}$$

此时(5.14)自然满足. 由于

$$g'g(D_tf'\cdot f)-f'f(D_tg'\cdot g)=fg(D_tf'\cdot g')$$
$$-f'g'(D_tf\cdot g)$$

$$P=fg(iD_tf'\cdot g')-f'g'(D_tf\cdot g)-gg'(D_x^2f'\cdot f)$$
$$+f'f(D_x^2g'\cdot g)=2i\lambda[fgD_xf'\cdot g'-f'$$
$$\cdot g'D_xf\cdot g]+[fgD_x^2f'\cdot g'-f'g'D_x^2f\cdot g]$$
$$-g'gD_x^2f'\cdot f+f'f(D_x^2g'\cdot g)$$

由 D 算子的性质可得

$$fgD_xf'\cdot g'-f'g'D_xf\cdot g=D_xf'g\cdot fg' \tag{5.16}$$

即有

$$\left[\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\cdot f'(x,t)f(x',t')\right]_{x'=x,t'=t}=0$$

即

$$(iD_t-D_x^2)f'\cdot f=0 \tag{5.10}$$

于是.我们推出如 f', f 由(5.3)确定,且(5.10)成立,则由(5.2)所定义的函数 u 是 BO 方程的解.

设 (f, f') 是(5.10)的一对解,而 (g, g') 为由类似的方法引进的 Bäcklund 关系式

$$(iD_t-2i\lambda D_x-D_x^2-\mu)f\cdot g=0 \tag{5.11}$$

$$(iD_t-2i\lambda D_x-D_x^2-\mu)f'\cdot g'=0 \tag{5.12}$$

$$(D_x+i\lambda)f\cdot g'=i\nu f'g \tag{5.13}$$

所确定,其中,λ, μ, ν 为任意参数. 可以证明 g 和 g' 满足方程

$$(iD_t-D_x^2)g'\cdot g=0 \tag{5.14}$$

事实上,只需证明由方程(5.10)—(5.13)推出

$$P=g'g(iD_t-D_x^2)f'\cdot f-f'\cdot f(iD_t-D_x^2)g'\cdot g=0 \tag{5.15}$$

此时(5.14)自然满足. 由于

$$g'g(D_tf'\cdot f)-f'f(D_tg'\cdot g)=fg(D_tf'\cdot g')$$
$$-f'g'(D_tf\cdot g)$$

$$P=fg(iD_tf'\cdot g')-f'g'(D_tf\cdot g)-gg'(D_x^2f'\cdot f)$$
$$+f'f(D_x^2g'\cdot g)=2i\lambda[fgD_xf'\cdot g'-f'$$
$$\cdot g'D_xf\cdot g]+[fgD_x^2f'\cdot g'-f'g'D_x^2f\cdot g]$$
$$-g'gD_x^2f'\cdot f+f'f(D_x^2g'\cdot g)$$

由 D 算子的性质可得

$$fgD_xf'\cdot g'-f'g'D_xf\cdot g=D_xf'g\cdot fg' \tag{5.16}$$

$$fgD_x^2f'\cdot g' - f'g'D_x^2f\cdot g$$
$$= D_x[(D_xf'\cdot g)\cdot fg' + f'g\cdot(D_xf\cdot g')] \quad (5.17)$$
$$f'fD_x^2g'\cdot g - g'\cdot gD_x^2f'\cdot f$$
$$= D_x[(D_xg'\cdot f)\cdot f'g + fg'\cdot(D_xf'\cdot g)] \quad (5.18)$$

将(5.17)和(5.18)相加，并利用 D 算子的反对称性，有

$$fgD_x^2f'\cdot g' - f'g'D_x^2f\cdot g + f'fD_x^2g'\cdot g - g'gD_x^2f'\cdot f$$
$$= 2D_x[f'g\cdot(D_xf\cdot g')] \quad (5.19)$$

再由 D 算子性质

$$cd(D_xa\cdot b) - ab(D_xc\cdot d) = D_xad\cdot bc \quad (5.20)$$

可得

$$P = 2i\lambda D_xf'g\cdot fg' + 2D_x[f'g\cdot(D_xf\cdot g')]$$
$$= 2D_x[f'g\cdot(D_x + i\lambda)f\cdot g'] \quad (5.21)$$

再由 Bäcklund 关系(5.13)可得

$$P = 2D_x[f'g\cdot(i\nu f'g)] = 2i\nu D_x[f'g\cdot f'g] = 0$$

这就是我们所要证明的．令

$$v = i\frac{\partial}{\partial x}(\log[g'/g]) \quad (5.22)$$

则给出 BO 方程的一个新解．

对于 Nakamura 修改的 BO 方程

$$u_t - 2\lambda u_x + 2\nu e^u u_x + Hu_{xx} + u_xHu_x = 0 \quad (5.23)$$

其中，H 为 Hilbert 变换算子，λ，ν 均为常数．类似地，令

$$u(x,t) = u_0 + \log\left[\frac{f'g}{fg'}\right] \quad (5.24)$$

可以证明，如果 f'，f，g，g' 满足条件

$$(iD_t - 2i\lambda D_x - D_x^2 - \mu)f\cdot g = 0 \quad (5.25)$$
$$(iD_t - 2i\lambda D_x - D_x^2 - \mu)f'\cdot g' = 0 \quad (5.26)$$
$$(D_x + i\lambda)f\cdot g' = i\nu' f'g(\nu' = \nu e^{u_0}) \quad (5.27)$$

则由(5.24)所定义的 $u(x,t)$ 为 MBO 方程(5.23)的解．

现考虑描述有限深度层流波动传播方程

$$u_t + 2uu_x + G[u_{xx}] = 0 \tag{5.28}$$

其中，G 为积分算子，

$$G[u(x, t)] = \frac{1}{2}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[\coth\frac{\pi}{2}\lambda(x' - x) - \operatorname{sgn}(x' - x)\right]u(x', t)dx' \tag{5.29}$$

其中，λ^{-1} 为刻划流体深度的参数．对于浅水波，$\lambda\to\infty$，为结为 KdV 方程；对于深水波，$\lambda = 0$，归结为 BO 方程．令

$$u(x, t) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left[\frac{\bar{f}}{f}\right]\right) \tag{5.30}$$

其中

$$f(x, t) = \prod_{n=1}^{N}[1 + \exp\{\lambda[\lambda(\mathrm{Im}z_n)(x - \lambda t) - \bar{x}_n]\}] \tag{5.31}$$

$z_n(n = 1, 2, \cdots, N)$ 为复的，$0 < \lambda\mathrm{Im}z_n < \pi$．$\bar{f}$ 为 f 的复数共轭．对于方程(5.28)，可得它的 Bäcklund 关系式

$$(iD_t + i(\lambda - 2\lambda')D_x - D_x^2 - \mu')f\cdot g = 0 \tag{5.32}$$

$$(iD_t + i(\lambda - 2\lambda')D_x - D_x^2 - \mu')\bar{f}\cdot g = 0 \tag{5.33}$$

$$(D_x + i\lambda')f\cdot g = i\nu'\bar{f}g \tag{5.34}$$

其中，λ'，μ'，ν' 为任意参数．

第六节　KdV 方程的无穷个守恒律

如众所知，物理学中有三个重要的守恒律即质量守恒律、动量守恒律和能量守恒律．在数学上，当一个物理问题可以用形如

$$u_t = K(u) \tag{6.1}$$

的微分方程描述时，这一方程对应的守恒律是指可以写成如

下的散度形式

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0 \tag{6.2}$$

此处的T和X都是与未知函数 $u(x,t)$ 相关的. T 一般称为守恒密度, X 称为守恒流量. 当X在区域的边界为零时, 由(6.2)可知 $I=\int T dx$ 是与时间无关的不变量.

无穷多个守恒律和孤立子的存在是紧密相关的. 现在愈来愈多的事实表明, 具有孤立子解的非线性方程大多有无穷多个守恒律. 另一方面,守恒积分又是重要的数学工具,借助它我们可对微分方程的解作出先验估计, 而这些先验估计又是微分方程解的存在、唯一性定理的核心和关键. 正如 Lax 指出的,具有无穷多个守恒律,是 KdV 方程区别于其他进化方程的最重要的特征.

对于 KdV 方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{6.3}$$

它对应的第一个守恒律形式为

$$u_t-(3u^2+u_{xx})_x=0 \tag{6.4}$$

由此可得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx\\&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=M_0(\text{动量守恒})\end{aligned} \tag{6.5}$$

这里我们已假定u及其导数在 $|x|\to\infty$ 时趋于零.

将u乘以 KdV 方程,可得到第二个守恒律

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t+\left(-2u^3+uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)_x=0 \tag{6.6}$$

由此可得到

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2(x, t) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2(x, 0) dx = E_0 \text{(能量守恒)} \tag{6.7}$$

第三个守恒律可表成

$$\left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2\right)_t + \left(-\frac{9}{2} u^4 + 3u^2 u_{xx} - 6uu_x^2 \right.$$
$$\left. + u_x u_{xxx} - \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right)_x = 0 \tag{6.8}$$

由此也可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2\right) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3(x, 0) + \frac{1}{2} u_x^2(x, 0)\right) dx \tag{6.9}$$

这些守恒律首先由 Whitham[1] 和 Miura[2] 等人得到。他们具体地写出了这些守恒律的形式。Miura 还利用一种巧妙的函数变换，得到了 KdV 方程的无穷多个守恒律。

现在我们考虑如下的 MKdV 方程

$$Qv \equiv v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0 \tag{6.10}$$

它和 KdV 方程(6.3)有如下关系：

定理 1 若 v 满足 (6.10)，则令 $u = v^2 + v_x$，它满足 KdV 方程(6.3)，即有

$$Pu \equiv u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

证明 事实上，$Pu = \left(2u + \frac{\partial}{\partial x}\right) Qv$，所以

$$Qv = 0 \Rightarrow Pu = 0$$

反之，不一定对。

不难验证 KdV 方程(6.3)关于变换

$t \to t'$，$x \to x' - 6ct'$，$u \to u' + c$ (c 为任意常数)

保持方程形式不变．我们引入如下变换

$$t' = t, \quad x' = x + \frac{3}{2\varepsilon^2}t$$

$$u(x, t) = u(x', t') + \frac{1}{4\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

则 (6.3) 保持不变．令 $v(x, t) = \varepsilon w(x', t') + \frac{1}{2\varepsilon}$，则变换 $u = v^2 + v_x$ 为

$$u(x', t') = w(x', t') + \varepsilon w_{x'}(x', t') + \varepsilon^2 w^2(x', t')$$

若略去"′"符号，有

$$\begin{aligned} 0 = Pu &= u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right)[w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x \\ &\quad + w_{xxx}] \equiv LRw \end{aligned}$$

其中

$$Rw \equiv w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx}$$

因 KdV 方程不包含 ε，可认为 u 与 ε 无关，$w(x, t)$ 依赖于 ε 由 $u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2$ ($\varepsilon \ll 1$) 的关系可知，w 为 u 的函数，关于 ε 展开有

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots \\ &= u - \varepsilon u_x - \varepsilon^2(u^2 - u_{xx}) + \cdots \end{aligned}$$

其中 $w_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 为 $u, u_x, u_{xx} \cdots$ 的多项式，将 w 代入

$$Rw = w_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0$$

令 ε 的高次幂系数为0，可得 KdV 方程的无穷多个守恒律．

第七节 AKNS 方程的无穷多个守恒量

由散射反演法可知，对于更一般的 Захаров Шабат 方程组

$$\begin{cases} v_{1x} = -i\zeta v_1 + q v_2 \\ v_{2x} = i\zeta v_2 + r v_1 \end{cases} \tag{7.1}$$

定义的特征函数 φ，$\bar{\varphi}$，ψ，$\bar{\psi}$ 具边界条件

$$\varphi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \qquad \psi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x},$$

$$x \to -\infty, \qquad x \to +\infty$$

$$\bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x}, \qquad \bar{\psi} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \tag{7.2}$$

此处当 $|x| \to \infty$ 时，$q, r \to 0$. $\zeta = \xi + i\eta$ 为特征值. 由 WKB 方法，可得到

$$\psi e^{-i\zeta x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\zeta}\begin{bmatrix} q \\ -\int_x^\infty qr dx' \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\bar{\psi} e^{i\zeta x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3i\zeta}\begin{bmatrix} \int_x^\infty qr dx' \\ -r \end{bmatrix} + \cdots \tag{7.3}$$

$$\varphi e^{i\zeta x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i\zeta}\begin{bmatrix} \int_{-\infty}^x qr dx' \\ r \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\bar{\varphi} e^{-i\zeta x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i\zeta}\begin{bmatrix} q \\ \int_{-\infty}^x qr dx' \end{bmatrix} + \cdots$$

$$a(\zeta) = w(\varphi, \psi) \sim 1 - \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^\infty qr dx' + \cdots \tag{7.4}$$

$$\bar{a}(\zeta) = w(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \sim 1 + \frac{1}{2i\zeta}\int_{-\infty}^\infty qr dx' + \cdots$$

其中，$w(u, v) = u_1 v_2 - v_1 u_2$. 当 $x \to \infty$ 时，有

$$\psi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \tag{7.5}$$

因此有

$$a(\zeta)=\lim_{x\to\infty}(\varphi_1 e^{i\zeta x}) \tag{7.6}$$

令 $e^{\hat{\varphi}}=\varphi_1 e^{i\zeta x}$，从(7.1)有

$$\begin{aligned}(\varphi_1 e^{i\zeta x})_x &= q\varphi_2 e^{i\zeta x}\\ (\varphi_2 e^{-i\zeta x})_x &= r\varphi_1 e^{-i\zeta x}\end{aligned} \tag{7.7}$$

消去 φ_2 和由上述 $\hat{\varphi}$ 的定义，以及(7.7)有

$$\left(\frac{1}{qe^{2i\zeta x}}(e^{\hat{\varphi}})_x\right)_x = re^{-2i\zeta x}e^{\hat{\varphi}} \tag{7.8}$$

或

$$\hat{\varphi}_x=\frac{1}{2i\zeta}\left[-qr+\hat{\varphi}_x^2+q\left(\frac{\hat{\varphi}_x}{q}\right)_x\right] \tag{7.9}$$

因从(7.3)有(当 $\zeta\to\infty$)

$$\varphi e^{i\zeta x}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+O(1/\zeta) \tag{7.10}$$

$\hat{\varphi}$ 对 ζ 展开有

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}&=\frac{\hat{\varphi}_1}{2i\zeta}+\frac{\hat{\varphi}_2}{(2i\zeta)^2}+\frac{\hat{\varphi}_3}{(2i\zeta)^3}+\cdots\\ &=\Sigma\frac{\hat{\varphi}_n}{(2i\zeta)^n}\end{aligned} \tag{7.11}$$

同时由(7.9)产生了一系列可解方程，前面几个是

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi}_{1x}=-qr\Rightarrow\hat{\varphi}_1=-\int_{-\infty}^{x}qr\,dy\\ &\hat{\varphi}_{2x}=q\left(\frac{\hat{\varphi}_{0x}}{q}\right)_x=qr_x\Rightarrow\hat{\varphi}_2=-\int_{-\infty}^{x}qr_y\,dy\\ &\hat{\varphi}_3=-\int_{-\infty}^{x}(qr_{yy}-q^2r^2)dy\end{aligned} \tag{7.12}$$

一般的对于 $\hat{\varphi}_n$ 的循环公式，有

$$\hat{\varphi}_{n+1} = q\left(\frac{\hat{\varphi}_n}{q}\right)_x + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\varphi}_k \varphi_{n-k} \qquad (n \geqslant 1) \tag{7.13}$$

其中 $\hat{\varphi}_0 = 0$, $\hat{\varphi}_1 = -qr$. 注意到 $a(\zeta)$ 与 t 无关，由此可得到守恒量

$$\ln a(\zeta) = \lim_{x\to\infty} \ln(\varphi_1 e^{i\zeta x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \hat{\varphi} = \sum_1^{\infty} \lim_{x\to\infty} \hat{\varphi}_n/(2i\zeta)^n \tag{7.14}$$

守恒量 $C_n = \lim_{x\to\infty} \hat{\varphi}_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 从(7.12)可得

$$\begin{cases} c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} qr\,dy \\ c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} qr_y\,dy \\ c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (qr_{yy} - q^2r^2)\,dy \end{cases} \tag{7.15}$$

对于一类高阶 KdV 方程

$$u_t + u^q u_x + u_{x^p} = 0 \tag{7.16}$$

其中，p, q 为非负整数 $p \geqslant 2$. 孤立子理论的创始人Kruskal, Miura[3] 曾在 1970 年猜测过它的守恒律的个数如表中所示.

p \ q		0	1	2	≥3
偶		1	1	1	1
奇	3	∞	∞	∞	∞
	≥5	∞	3	3	3

对于这个猜测，屠规彰等人[4]运用对称函数的方法，成功而圆满地给出了证明.

对于更广泛一类 KdV 方程

$$u_t + f(u)_x = \beta u_{xxx} \tag{7.17}$$

当 $f(u)$ 为 u 的多项式时，在文献[5]中具体找出了它的三个守恒律：

$$\begin{cases} T_1 = u, \ X_1 = f(u) - \beta u_{xx} \\ T_2 = \frac{1}{2} u^2, \\ X_2 = \int_0^u f'(u) u du - \beta u u_{xx} + \frac{1}{2} \beta u_x^2 \\ T_3 = \frac{\beta}{2} u_x^2 + \int_0^u f(u)\, du \\ X_3 = \beta f'(u) u_x^2 + \beta^2 u_x u_{xxx} - \frac{\beta^2}{2} u_{xx}^2 \\ \qquad + \frac{1}{2} f^2(u) - \beta f(u) u_{xx} \end{cases} \tag{7.18}$$

在文献[6]中，对于如下的非线性进化方程

$$u_t = H(u, u_1, \cdots, u_n), \ \left(u_i = \mathscr{D}^i u, \ \mathscr{D} = \frac{d}{dx}\right) \tag{7.19}$$

其中，$H(u, u_1, \cdots, u_n)$ 表示 u_i 的常系数多项式．他们利用无穷小变换和对称与守恒律的关系，从而证明：若 $H = \mathscr{D} g$（g 为梯度多项式），则(7.19)至少存在三个守恒律．

在文献[7]中，对于 Boussinesq 方程

$$u_{tt} = u_{xx} + (3u^2)_{xx} + u_{xxxx} \tag{7.20}$$

利用它的 Bäcklund 变换得到了它的无穷多个守恒律．

参 考 文 献

[1] B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London*, 283 A (1965), 238—261.

[2] M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, 9 (1968), 1204—1209.

[3] M. D. Kruskal, M. Miura, C. S. Gardner, *J. Math. Phys.*, 11 (1970), 952.

[4] 屠规彰、秦孟兆，中国科学，第五期，1980，427—432.

[5] 郭柏灵，科学探索，第三卷，第二期，1983，31—40.
[6] 秦孟兆、屠规彰，应用数学学报，第五卷，第二期，1982，
[7] 屠规彰，应用数学学报，第四卷，1981，63.
[8] G. L. Lamb, *J. Math. Phys.*, **15** (1974), 2157—2165.
[9] Deun, A. Payne, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1593.
[10] Tu, G. Z. Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. **3**, 1465, Science Press, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.
[11] Tu, G. Z., *Lett. Math. Phys.*, **3** (1979), 531.
[12] Tu, G. Z., *Commun. Math. Phys.*, **77** (1980), 289.
[13] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27** (1971), 1192—1194.
[14] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **33** (1972), 1459—1463.
[15] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **33** (1972), 1456—1458.
[16] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **35** (1973), 281—288.
[17] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **35** (1973), 289—291.
[18] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **34** (1973), 18—25.
[19] R. Hirota, *Prog. Thero. Phys.*, **52**(1974), 1498.
[20] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **46** (1979), 1681.
[21] Huang Xun cheng, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **15** (1982), L347—L349.
[22] Sawada, S. and Koterz, T., *Progr. Theoret. Phys.*, **51** (1974), 1355—1367.
[23] Satsuma, J. and Kaup, D. J., *J. Phys. Soc. Japan.*, **43** (1977), 692—697.
[24] Tu, G. Z., *Lett. Math. Phys.*, **4** (1980), 347—355.
[25] Tu, G. Z., *J. Phys. A, Math. Gen.*, **14** (1981).

第六章　多维孤立子及其稳定性

第一节　引　　言

在我们遇到了大量的一维孤立子问题后，必然会提出这样的问题：多维孤立子是否存在？如果存在的话，它的行态又是如何？这的确是一个普遍关心而又非常重要的问题．关于多维孤立子问题，目前已开展了不少的工作，而且取得了一些很有意义的成果．虽然从数量上相对来说，这还是少量的，但从需要开展工作的角度来看，目前的工作也仅仅是开始．当然，多维孤立子的问题的确是一个很复杂而困难的问题，它涉及一系列必须解决的问题．从目前情况来看，至少有如下问题：①多维"孤立波"(Solitary wave)、"驻波"(Standing wave)的解是否存在？从数学上来看，这个问题是和解决一类非线性椭圆型方程、方程组某些边值问题非零解的存在性问题相联系；②这些"孤立波"、"驻波"的解是否稳定？在有限的时间内是否会垮台、坍塌(Collapse)？这是物理上最关心的问题之一；③这些解是否是"孤立子"解？即在相互作用下它的波形、振幅是否保持不变或者变化不大？对于这些问题中的某些具体问题已作了部分回答．在[1],[2]中早已指出一类实的(不荷电的)标量场的非线性波动方程多维恒稳解是不存在的，即如果存在恒稳解也只有在平面几何情况下才是稳定的．在[3],[4]中研究了非线性 Klein-Gordon 方程"孤立波"、"驻波"解存在的某些充分判别条件．在[5]，[6]中讨论了多维非线性 Langmuir 孤立波和周期行波解的存在条件．在[7]中详细

研究了一类由三维数量场形成的孤立子存在的条件，并对它的稳定性建立了一般定理，对一些特殊问题给出了数值结果．在[8]中证明了在低压磁化等离子体中，三维离子声波孤立子的存在性和它的稳定性．在[9]中给出了二维 Sine-Gordon 方程三个孤立子解的表达式．在 [10]，[11] 中讨论了多维非线性 Schrödinger 方程孤立波问题．在[12]中考虑了水波中的柱形孤立子，给出了数值计算的结果．郭柏灵等推导了二维 Boussinesq 方程、二维 KdV 方程并讨论了它们的孤立波解的问题．在[13]中讨论了在非线性场论中，非线性 Klein-Gordon 方程孤立子的稳定性问题，指出具有三次非线性项是不稳定的，而具有五次非线性项则是稳定的．在[14]，[15]中研究并论述了等离子体多维孤立子的存在和坍塌问题．从目前研究工作的状况来看，考虑多维孤立子的存在性问题，大量的文章致力于充分对称的恒稳解的研究，使得问题在数学上是一维的，即考察球对称或柱对称模型．至于"多维"孤立子的动力学问题，即对形成相互作用过程的考察，利用计算机进行数值计算则处于突出地位．从这方面来看，它促进了计算数学对于一类新型的进化方程、方程组计算方法的发展．这一章主要介绍几种比较重要的非线性进化方程多维孤立子存在的主要结果，并对它们的稳定性和坍塌作些简要的介绍和评论．

第二节　多维孤立子的存在问题

我们定义孤立波作为波动方程的一个解，当 $t\to\infty$ 时它的最大振幅 $\sup\limits_{x}|\varphi(x,t)|$ 不趋于零，但对每个 t，当 $|x|\to\infty$时它趋于零，从物理上来看，一些物理量如电荷、能量等在一切时间中集中于空间的有限区域(即非弥散)．孤立波一般

具有两种特殊的形式：(1)行波，$\varphi = u(x - ct)$，其中 c 为常数向量；(2) 驻波 $\varphi = \exp(i\omega t)u(x)$，于此 ω 为实数，$i = \sqrt{-1}$. 通常指的孤立波是行波(1)，但在最近几年对于具有振荡因子的驻波 (2) 也被称为孤立波，例如对非线性 Schrödinger 方程具有振荡因子的行波解，已被称为包络孤立波. 在某些文献中，有时把"孤立波"混同于"孤立子"，然而正确地说，孤立子应理解为具有某种"安全系数"的孤立波，即这种孤立波在相互作用中，它的振幅和形状不变或只有微弱的变化. 下面我们就几种比较重要的非线性波动方程、方程组的孤立波、孤立子的存在问题分别进行讨论.

(I) 非线性 Klein-Gordon 方程(实的 NLKG 方程)

$$\varphi_{tt} - \Delta\varphi + m^2\varphi + f(\varphi) = 0 \tag{2.1}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$，$\Delta$ 为 Laplace 算子，$m > 0$. 我们设 $f(0) = 0$，$f(re^{i\theta}) = f(r)e^{i\theta}$，如 φ 具有驻波形式解(2)，则方程(2.1)可归结为

$$-\Delta u + (m^2 - \omega^2)u + f(u) = 0 \tag{2.2}$$

我们将证明，当 $f(u)$ 满足某些增长条件，$|\omega| < m$，则(2.2)具有在 $|x| \to \infty$ 处指数趋于零的非平凡解. 若(2.1)存在行波解(1)，则有

$$-\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + m^2 u + f(u) = 0 \tag{2.3}$$

其中，$a_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j$. 若 $|c| < 1$，则 (a_{ij}) 为正定矩阵. 事实上，$\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_j = |\xi|^2 - (c.\xi)^2 \geq (1 - (c)^2)|\xi|^2$，对一切 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$ 成立. 通过一些旋转等变换，(2.3)以及(2.2)均可简化为以下方程

$$-\Delta u + F(u) = 0, \quad x \in R^n \tag{2.4}$$

其中，$F(u) = f(u) + (\mathrm{const})u$. 我们恒设 $F(0) = 0$，它意

味着方程(2.4)永远具有平凡解 $u=0$，设 F 为实的连续函数，令 $G'=F$，$G(0)=0$. 我们容易得到方程(2.4)有解的一些必要条件.

定理 1 如 $u(x,t)$ 为 (2.4) 的解，且当 $|x|\to\infty$ 时趋于零，则有

$$(n-2)\int|\nabla u|^2dx=-(n-2)\int uF(u)dx$$
$$=-2n\int G(u)dx \tag{2.5}$$

因此，如 $sF(s)$或 $G(s)(n\neq 1)$ 或 $H(s)=(n-2)sF(s)-2nG(s)$，或 $-H(s)$ 为正 $(s\neq 0)$，则 (2.4) 仅有一平凡解. 对于任何非平凡解，能量是正的:

$$E(t)=\int\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-G(u)\right]dx$$
$$=\frac{1}{n}\int|\nabla u|^2dx>0$$

证 我们证明等式(2.5)成立. 设 $\bar{u}$ 表示 u 的复数共轭，我们有

$$-(\Delta u)\bar{u}=\nabla(\nabla u\cdot\bar{u})+|\nabla u|^2$$

再将 $\bar{u}$ 乘以(2.4)对 x 积分，并且设 u 和它的导数当 $|x|\to\infty$ 时趋于零，我们得到

$$\int[|\nabla u|^2+\mathrm{Re}\,\bar{u}F(u)]dx=0$$

另一方面，$r\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial r}=\Sigma x_i\bar{u}_i$，及恒等式

$$-\mathrm{Re}\,u_{ij}\bar{u}_i=-\mathrm{Re}\,(u_jx_i\bar{u}_i)_j$$
$$+\left(\frac{1}{2}x_i|u_j|^2\right)_i+\left(1-\frac{n}{2}\right)|u_j|^2,$$
$$\mathrm{Re}\,F(u)x_i\bar{u}_i=(x_iG(u))_i-nG(u)$$

$$\int [(n-2)|\nabla u|^2 + 2nG(u)]dx = 0$$

由此即得(2.5). 令 $L \equiv -\Sigma a_{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a_0$，其中常数矩阵 a_{ij} 为正定，a_0 为正常数. 设 $F_1(s)$，$F_2(s)$ 为实连续函数，$s \in [0, \infty)$，$G_1(s)$，$G_2(s)$ 分别为 F_1，F_2 的不定积分. 假设满足以下条件:

$$F_1(s) \geqslant 0, \ F_2(s) > 0, \ s > 0 \tag{2.6}$$

$$\text{当 } s \to 0 \text{ 时 } F_1(s) = O(s), \ F_2(s) = o(s) \tag{2.7}$$

$$F_2(s) = o(s^l + F_1(s)), \ s \to \infty \tag{2.8}$$

$$F_2(s) = O(s^l + G_1(s)/s), \ s \to \infty \tag{2.9}$$

其中，$l = \dfrac{n+2}{n-2}$，且 $n > 3$.

定理 2 设满足条件 (2.6),(2.7),(2.8),(2.9)，则存在 $\lambda > 0$ 和

$$Lu + F_1(u) = \lambda F_2(u) \tag{2.10}$$

的解 $u \in H^1$，且是非负的；当 $|x| \to \infty$ 时，u 指数衰减于零，且 $\int G_1(u(x))dx < \infty$.

附注 当 $n = 1$ 或 $n = 2$ 时定理 2 仍然正确，此时可在更弱的条件下成立. 以下我们举几个例子说明如何利用定理 1、定理 2 的结果.

例 1 $-\Delta u + u - |u|^{q-1}u = 0$，$x \in R^n$，$n \geqslant 3$，$q > 1$. 应用定理 1，

$$F(s) = s - |s|^{q-1}s, \ G(s) = \frac{s^2}{2} - \frac{|s|^{q+1}}{q+1}$$

令 $\alpha^{-1} = 2^{-1} - (q+1)^{-1}$，故当

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)sF(s) - nG(s) = -s^2 + (1 - \alpha^{-1}n)|s|^{q+1},$$

其系数为同号时，即 $\alpha \leqslant n$，或 $q \geqslant \frac{n+2}{n-2}$，不存在非平凡解. 故设 $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$. 任何解都必须满足恒等式 (2.5)，即有

$$\alpha(n-2)\int |\nabla u|^2 dx = \frac{n\alpha}{\alpha-n}\int |u|^2 dx$$

$$= n\int |u|^{q+1} dx$$

若置 $F_1(s) = 0$, $F_2(s) = |s|^{q-1}s$, $L = -\Delta + I$, $\lambda = 1$，则由定理2可知非负解是存在的.

例 2 $-\Delta u + (m^2 - w^2)u + |u|^{p-1}u - \lambda|u|^{q-1}u = 0$，其中，$x \in R^n$，$m^2 - w^2 > 0$，且 p，q 为互不相同的大于1的数. 我们分四种情况讨论.

情况 A: $1 < q < \max\left(p, \frac{n+2}{n-2}\right)$. 定理 2 断言，对某个 $\lambda > 0$，存在非平凡解. 注意到

$$G(s) = \frac{1}{2}(m^2 - w^2)s^2 + \frac{1}{p+1}|s|^{p+1}$$

$$- \frac{\lambda}{q+1}|s|^{q+1}$$

为下有界，存在 λ_*，使得当 $\lambda \geqslant \lambda_*$ 时 $G(s)$ 为非负的，依定理 1 仅有平凡解. 由定理 1 可知，如果非平凡解存在，其能量积分必须是正的，此时有能量密度

$$\frac{1}{2}|\varphi_t|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + G(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + w^2u^2 + G(u)$$

如 $w > 0$，且 λ 稍大于 λ_*，则易验证上式是正的. 在[14]中，当 $n = 3$，$p = 5$，$q = 3$ 时已计算了这些解，并得到了令人

关注的结果：当能量密度为正时，正解关于初始条件的扰动是稳定的．在上述 p, q, n 的选取下，且取 $m^2 - w^2 = 1$，有不等式

$$\lambda s^4 = (2s)\left(\frac{1}{2}\lambda s^3\right) \leqslant \frac{1}{2}(2s)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\lambda s^3\right)^2$$

$$= 2s^2 + \frac{1}{8}\lambda^2 s^6$$

$$G(s) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^6 - \frac{\lambda}{4}s^4 \geqslant \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{32}\lambda^2\right)s^6$$

可得 $\lambda_* = (4.3)^{-\frac{1}{2}}$.

情况 B：$p < q < \dfrac{n+2}{n-2}$. 应用定理 2，我们可证对每个 $\lambda > 0$，存在非平凡解的无穷序列.

情况 C：$p \leqslant (n+2)/(n-2) \leqslant q$，令 $\alpha^{-1} = 2^{-1} + (q+1)^{-1}$，$\beta^{-1} = 2^{-1} + (p+1)^{-1}$，则 $\alpha \leqslant n \leqslant \beta$，且

$$\frac{n-2}{2}sF(s) - nG(s)$$

$$= -s^2 - \left(1 - \frac{n}{\beta}\right)|s|^{p+1} + \left(1 - \frac{n}{\alpha}\right)\lambda|s|^{q+1}$$

由定理 1，存在非平凡解.

情况 D：$(n+2)/(n-2) < p < q$，这种情况我们不知道是否存在非平凡解.

附注 对于方程 $-\Delta u + F(u) = 0$ 非平凡解的存在性，实质上要求 $F'(0) \geqslant 0$. 事实上，设 $-\alpha = F'(0) < 0$，令 $f(s) = F(s)/s + \alpha$，设 $u(x)$ 为一非平凡解且在无穷远处很小，令 $q(x) = f(u(x))$. 此时方程可改写为 $-\Delta u + qu = \alpha u$. 设 $u(x)$ 为在无穷远处充分小，使得 $q(x) = O|x|^{-1})$. 则我们易知算子 $-\Delta + q$ 没有正的特征值，故得矛盾，于是

$$F'(0) \geqslant 0$$

我们现考虑轴对称问题的解. 轴向解 $u(r)$: 对 $r=|x|\neq 0$, 它是连续的,且满足方程

$$u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r-F(u)=0,\ 0<r<\infty$$

其中, $F(u)=u+F_1(u)-\lambda F_2(u)$. 于是

$$r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r=u_{rr}+((n-1)/r)u_r$$

是连续的,因此 $u\in c^2$, $r\neq 0$. 令

$$q(r)=\frac{F(u(r))}{u(r)}=1+F_1'(0)+p(r)$$

由(2.6),(2.7)可知 $p(r)\to 0$, $r\to\infty$. 因此对充分大的 r 有 $q(r)\geqslant\frac{1}{2}$. 置 $v=r^{(n-1)/2}u$, 它满足方程

$$v_{rr}-\left[q(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\right]v=0$$

$$\left(\frac{1}{2}v^2\right)_{rr}=v_r^2+\left[q(r)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\right]v^2$$

于是对充分大的 r, $w=v^2$ 满足不等式 $w_{rr}\geqslant w$. 从这不等式推出 w 和 u 为指数衰减.

事实上,对大的 r, 可推出 $Q=e^{-r}(w_r+w)$ 为非减的, 如果 Q 对大的 r 保持非正,则有 $(e^rw)_r=e^{2r}Q\leqslant 0$, 从而推出 $w=O(e^{-r})(r\to\infty)$. 如果 $Q\geqslant 2\delta>0$, 则 w_r+w 在靠近无穷远处必然不可积, 但因 $u\in H^1$, 故函数 v^2, v_r^2, w, 和 w_r 均在区间 $k<r<\infty$ 上可积,这就得到了矛盾,从而证明了解的指数衰减.

关于轴向解和一类定解问题的解有如下关系:

定理 3 设 $L=I-\Delta$, $F_1=0$, F_2 为连续实函数,使得

(i) $sF_2(s)>0$, $s\neq 0$

(ii) $F_2(s)=O(|s|^p)$, $|s|\to\infty$, 且

$$p<(n+2)/(n-2)=l$$

(iii) F_2 是奇函数,且 $F_2(0)=0$

则对任何 $\gamma>0$, 存在 $Lu=\lambda F_2(u)$ 的无穷对轴向解,$(\lambda_k, \pm u_k)$, $k=0,1,2,\cdots$, 且

$$(Lu_k, u_k)=\gamma$$

定理 4 设 F 为实连续函数,且满足

(i) $F(s)/s\to-\infty, s\to+\infty$

(ii) $sF(s)\geqslant\alpha G(s)$, $\alpha>2$

(iii) $F(s)=o(s)$, $s\to 0$

(iv) $F_2(s)=O(|s|^p)$, $|s|\to\infty$, $p<(n+2)/(n-2)=l$

则方程 $Lu+F(u)=0$ 至少具有一个非平凡解. 如果 F 是奇函数,则存在无穷对相异的解 $\pm u_k(k=0,1,2,\cdots)$.

例 1 $-\Delta u+u-|u|^{q-1}u=0$, $1<q<\dfrac{n+2}{n-2}$. 由定理 3、定理 4 推出具有多个轴向解 $u_0, u_1, u_2, \cdots$.

例 2 $-\Delta u+u+|u|^{p-1}u-\lambda|u|^{q-1}u=0$, $1<p<q<\dfrac{n+2}{n-2}$. 对任何 $\lambda>0$, 可应用定理 4, 推出至少具有一个非平凡解. 对于大的 p, q, 问题仍未解决.

II 多维非线性 Langmuir 波

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=-\nabla^2\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{E} \\ \dfrac{\partial^2 n}{\partial t^2}=\nabla^2[n+g(|\boldsymbol{E}|^2)] \end{cases} \tag{2.11}$$

其中,$i=\sqrt{-1}$, $\boldsymbol{E}=(E_1, E_2, \cdots, E_N)$ 为高频电场复的振幅, n 为离子密度关于它的常数平衡态的低频扰动, g 为 $|\boldsymbol{E}|^2$ 的给定函数. 当 $g(|\boldsymbol{E}|^2)=|\boldsymbol{E}|^2$ 时, (2.11) 即为

Захаров 方程组；当 $g(|\boldsymbol{E}|^2)=\varkappa(1-\exp(-|\boldsymbol{E}|^4))$ 时，其中 $\varkappa$ 为正常数，则对应于离子密度的饱和态. 设 $\boldsymbol{k}$ 为 R^n 上的单位向量，v 为行波速度，我们寻求(2.11)如下的行波解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-vt),\ n(\boldsymbol{x},t)=s(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-vt) \quad (2.12)$$

其中，$\boldsymbol{h}$ 和 s 分别为待求向量函数和待求函数. 设 $|\boldsymbol{h}(\xi)|$，$|s(\xi)|$ 为一致有界，其中 $\xi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-vt$，且设

$$|\boldsymbol{h}(\xi)|,\ s(\xi)\to 0(|\xi|\to\infty).$$

将(2.12)代入(2.11)得到 $\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_N)$ 和 s 满足的方程

$$-iv\frac{d\boldsymbol{h}}{d\xi}+\frac{d^2\boldsymbol{h}}{d\xi^2}=s(\xi)\boldsymbol{h}(\xi) \quad (2.13)$$

$$(v^2-1)\frac{d^2s}{d\xi^2}=\frac{d^2}{d\xi^2}g(|\boldsymbol{h}|^2) \quad (2.14)$$

将方程(2.14)积分得

$$(v^2-1)s(\xi)=g((|\boldsymbol{h}(\xi)|^2)+\hat{c}\xi+c \quad (2.15)$$

其中，$\hat{c}$ 和 c 均为积分常数. 设 $v^2\neq 1$，从 $s(\xi)$ 的有界性要求，置 $\hat{c}=0$，从(2.15)解出 $s(\xi)$ 代入(2.13)，可得满足 $\boldsymbol{h}$ 的复方程

$$\frac{d^2\boldsymbol{h}}{d\xi^2}-iv\frac{d\boldsymbol{h}}{d\xi}=(v^2-1)^{-1}[g(|\boldsymbol{h}(\xi)|^2)+c]\boldsymbol{h} \quad (2.15')$$

为方便起见，将(2.15′)写成极坐标形式. 令

$$h_j(\xi)=A_j(\xi)\exp[i\theta(\xi)],\ j=1,2,\cdots,N$$

则有

$$\frac{d^2A_j}{d\xi^2}+A_j\theta_j'(\xi)[v-\theta_j'(\xi)]$$
$$=(v^2-1)^{-1}A_j[g(\|A\|^2)+c] \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}=(v-2\theta_j'(\xi)]\frac{d}{d\xi}\ln A_j,\ j=1,2,\cdots,N \quad (2.17)$$

其中，$A=(A_1, A_2, \cdots, A_N)$，$\|A\|=|\boldsymbol{h}|$，$\theta_i'=\frac{d\theta_i}{d\xi}$，将(2.17)积分可得

$$\theta_i'(\xi)=(v-\mu_i A_i^{-2}(\xi))/2$$

$$\mu_i=A_i^2(0)(v-2\theta_i'(0)) \tag{2.18}$$

将(2.18)代入(2.16)得到满足 A_i 的微分方程组

$$\frac{d^2A_i}{d\xi^2}=f(\mu_i, c, \boldsymbol{A})A_i, \quad i=1, 2, \cdots N \tag{2.19}$$

其中

$$f(\mu_i, c, \boldsymbol{A})=(\mu_i^2A_i^{-4}-v^2)/4 + (v^2-1)^{-1}[g(\|A\|^2)+c] \tag{2.20}$$

(2.19) 可写成如下形式

$$\frac{d^2A_i}{d\xi^2}=\frac{\partial U}{\partial A_i}, \quad i=1, 2\cdots N \tag{2.21}$$

其中

$$U(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\mu}, c)=U_1(\|\boldsymbol{A}\|^2, c)-\sum_{i=1}^{N}\mu_i^2/8A_i^2 \tag{2.22}$$

$$2U_1(\|\boldsymbol{A}\|^2, c)=\int_0^{\|A\|^2}[Kg(\eta)+\gamma]d\eta \tag{2.23}$$

$$K=(v^2-1)^{-1}, \quad \gamma=(v^2-1)^{-1}c-v^2/4 \tag{2.24}$$

且 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N)$. (2.21)的首次积分为

$$I(\boldsymbol{A}(\xi), \boldsymbol{A}'(\xi))=\|\boldsymbol{A}'(\xi)\|^2-2U_1(\|\boldsymbol{A}(\xi)\|^2, c) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i^2A_i^{-2}(\xi)/4=c_1 \tag{2.25}$$

其中，$\|\boldsymbol{A}'(\xi)\|^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{dA_i(\xi)}{d\xi}\right]^2$，且

$$c_1 = \|\boldsymbol{A}'(0)\|^2 - 2U_1(\|\boldsymbol{A}(0)\|^2, c) - \sum_{j=1}^{N} [v - 2\theta_j'(0)] \tag{2.26}$$

显然,如对某个 j, $\mu_j \neq 0$, 且因 c_1 为有限的,则当

$$\|\boldsymbol{A}'(\xi)\| \to 0, \ \|\boldsymbol{A}(\xi)\| \to 0$$

时, $I(\boldsymbol{A}(\xi), \boldsymbol{A}'(\xi)) \to -\infty$, 因此不存在(2.21)或(2.16)的孤立波解使得 $\|\boldsymbol{A}(\xi)\| \to 0$, $\|\boldsymbol{A}'(\xi)\| \to 0(|\xi| \to \infty)$. 当 $\mu = 0$ 时,我们有

$$\theta_j(\xi) = \theta_j(0) + \frac{1}{2} v\xi \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.27}$$

此时(2.21)为

$$\frac{d^2 A_j}{d\xi^2} = \frac{\partial U_1}{\partial A_j}, \ j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.28}$$

(2.28)的平衡点为 $(A_e, 0) \in R^{2N}$, 使得 A_e 为 U_1 的定常点或方程 $f(0, c, \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = 0$. 显然 A_e 包括 $A = 0$ 和 A 满足 $g(\|\boldsymbol{A}\|^2) = v^2(v^2 - 1)/4c$. 对于(2.28),令 $u(\xi) = \|\boldsymbol{A}(\xi)\|^2$, 直接计算可得

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 2\|\boldsymbol{A}'(\xi)\|^2 + 2\boldsymbol{A}(\xi) \cdot \frac{d^2\boldsymbol{A}}{d\xi^2} = 2\|\boldsymbol{A}'(\xi)\|^2 + 2u\bar{f}(c, u) \tag{2.29}$$

其中, $\bar{f}(c, \|\boldsymbol{A}\|^2) = f(0, c, A)$. 对于固定的 c_1 和 $\mu = 0$, (2.29) 为

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 2[u\bar{f}(c, u) + c_1 + 2U_1(u, c)] = p(u, c, c_1) \tag{2.30}$$

初始条件为

$$u(0) = \|\boldsymbol{A}(0)\|^2, \ u'(0) = 2\boldsymbol{A}(0) \cdot \boldsymbol{A}'(0) \tag{2.31}$$

$$\|\boldsymbol{A}'(0)\|^2 = c_1 + 2U_1(\|\boldsymbol{A}(0)\|^2, c) \geqslant 0 \tag{2.32}$$

(2.30)的首次积分为

$$[u'(\xi)]^2 = [u'(0)]^2 + \int_{u(0)}^{u(\xi)} QP(\eta, c, c_1)d\eta$$
$$= Q(u, c, c_1, u'(0)) \tag{2.33}$$

其中，$u' = \dfrac{du}{d\xi}$. 方程(2.33)仅当它的右端为非负时，才是正确的. $\|A(\xi)\|^2$ 的隐式表示能由(2.33)的积分得到

$$\int_{\|A(0)\|^2}^{\|A(\xi)\|^2} Q(\eta, c, c_1, u'(0))^{-\frac{1}{2}}d\eta = \pm\xi \tag{2.34}$$

我们现在就方程(2.28)具有 $\|A(\xi)\| \to 0(|\xi| \to \infty)$ 的解的存在性进行讨论.

定理 5 如 $Kg(u) + \gamma \geqslant 0, \ \forall u \geqslant 0$ (2.35)

则不存在(2.28)的解,使得

$$\|\boldsymbol{A}(0)\| > 0, \ \|\boldsymbol{A}(\xi)\| \to 0(|\xi| \to \infty)$$

证 条件(2.35)等价于 $\tilde{f}(c, u) \geqslant 0$，对 $u \geqslant 0$. 由(2.29)有 $\dfrac{d^2u}{d\xi^2} \geqslant 0$，推出 $\|\boldsymbol{A}(\xi)\|^2$ 对应于(2.28)的任何解）为 ξ 的凸函数. 因此不可能有 $\|A(0)\| > 0$，且$\|\boldsymbol{A}(\xi)\| \to 0(|\xi| \to \infty)$的解.

定理 6 若满足以下条件:

(i) $v^2(v^2 - 1) > 4c, \ v^2 < 1$

(ii) $g(s)$ 为严格单调增加函数，$g(0) = 0$，且存在正数 $u_1 < \infty$，使得

$$\int_0^{u_1} g(\eta)d\eta = [v^2(v^2 - 1)/4 - c]u_1 \tag{2.36}$$

$$\int_0^u g(\eta)d\eta > [v^2(v^2 - 1)/4 - c]u_1, \ \forall u > u_1 \tag{2.37}$$

则(2.28)具有一个解，$\boldsymbol{A}(\xi) \geqslant 0, \forall\xi \in R$，具有$\|\boldsymbol{A}(0)\| > 0$，$\|\boldsymbol{A}'(0)\| = 0$，使得 $\|\boldsymbol{A}(\xi)\| \to 0$，$\|\boldsymbol{A}'(\xi)\| \to 0(|\xi| \to \infty)$.

对于方程 (2.28)，要求它的模为 ξ 的周期函数的解 $\boldsymbol{A}(\xi)$，我们有

定理 7 设定理6条件满足，且存在实数 $r_c > 0$，满足

$Kg(r_c^2) + \gamma = 0$，或 $g(r_c^2) = v^2(v^2-1)/4 - c$ (2.38)

则存在(2.28)的解 $\boldsymbol{A}(\xi)$，$\|\boldsymbol{A}(\xi)\|$ 为 ξ 的周期函数.

定理 8 设以下条件满足

(i) $g(u)$ 为实值单增函数，且 $g(0) = 0$

(ii) $v^2(v^2-1) < 4c$，$v^2 > 1$

(iii) 初始条件 $\boldsymbol{A}(0)$，$\boldsymbol{A}'(0)$ 满足 $\|\boldsymbol{A}(0)\| > 0$

$$\bar{c}_1 = \|\boldsymbol{A}'(0)\|^2 - 2U_1(\|\boldsymbol{A}(0)\|^2, c) \geqslant 0$$

则存在(2.28)的解 $\boldsymbol{A}(\xi)$，$\|\boldsymbol{A}(\xi)\|$ 一定不是 ξ 的周期函数.

(III) 三维 FDS 非线性波动方程

$$\Box\varphi + \alpha^2\chi^2\varphi = 0 \tag{2.39}$$

$$\Box\chi + \alpha^2\chi|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\chi(\chi^2-1) = 0 \tag{2.40}$$

其中，$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. 对于复场，考虑如下具振荡因子的行波解

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(r)e^{-i\omega t} \tag{2.41}$$

从(2.39)，(2.40)得

$$\nabla^2\phi - \alpha^2\chi^2\phi + \omega^2\phi = 0 \tag{2.42}$$

$$\nabla^2\chi - \alpha^2\phi^2\chi - \frac{1}{2}(\chi^2-1)\chi = 0 \tag{2.43}$$

电荷 $Q = \omega\int\phi^2 d^3x$，系统的能量 $E = \int\varepsilon d^3\chi$，其中

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\chi)^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 + \alpha^2\chi^2)\phi^2$$

$$u_t = \left[f(-i\omega) - \sum_{j=1}^{N} f_{x'_j} c_j\right] e^{i\theta}$$

$$u_{x_j x_j} = [-k_j k_j f + i(k_j f_{x'_j} + k_j f_{x'_j}) + f_{x'_j x'_j}] e^{i\theta}$$
$$(j = 1, 2, \cdots N)$$

代入(2.47)可得

$$\omega f - i \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}' c_i + 2i \sum_{j=1}^{N} k_j f_{x'_j}$$
$$- \sum_{i=1}^{N} k_j^2 f + \nabla'^2 f + q(f^2) f = 0$$

取 $c_j = 2k_j$，消去虚部得

$$\nabla'^2 f + \left(\omega - \sum_{j=1}^{N} k_j^2\right) f + q(f^2) f = 0 \qquad (2.49)$$

特别对于球对称有

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \rho}\right)$$
$$+ \left(\omega - \sum_{j=1}^{n} k_j^2\right) f + q(f^2) f = 0 \qquad (2.50)$$

当 $n = 1$，$\omega = k_i^2 - \eta^2$，我们得到一维非线性 Schrödinger 方程的孤立子解，它是稳定的. 对于 $n > 1$ 的孤立波解，则是不稳定的.

(V) 在低压磁化等离子体中，三维离子声波方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \boldsymbol{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = -e\nabla\varphi/M + [\boldsymbol{V}, W_{H_i}] \\ \Delta\varphi = -4\pi e(n - n_0)\exp(e\varphi/T_e) \end{cases} \qquad (2.51)$$

化简为无量纲形式

$$u_t = \left[f(-i\omega) - \sum_{j=1}^{N} f_{x_j'} c_j \right] e^{i\theta}$$

$$u_{x_j x_j} = [-k_j k_j f + i(k_j f_{x_j'} + k_j f_{x_j'}) + f_{x_j' x_j'}] e^{i\theta}$$

$$(j = 1, 2, \cdots N)$$

代入(2.47)可得

$$\omega f - i \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}' c_i + 2i \sum_{j=1}^{N} k_j f_{x_j'}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} k_j^2 f + \nabla'^2 f + q(f^2) f = 0$$

取 $c_j = 2k_j$，消去虚部得

$$\nabla'^2 f + \left(\omega - \sum_{j=1}^{N} k_j^2 \right) f + q(f^2) f = 0 \qquad (2.49)$$

特别对于球对称有

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)$$

$$+ \left(\omega - \sum_{j=1}^{n} k_j^2 \right) f + q(f^2) f = 0 \qquad (2.50)$$

当 $n = 1$，$\omega = k_i^2 - \eta^2$，我们得到一维非线性 Schrödinger 方程的孤立子解，它是稳定的. 对于 $n > 1$ 的孤立波解，则是不稳定的.

(V) 在低压磁化等离子体中，三维离子声波方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \boldsymbol{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} = -e \nabla \varphi / M + [\boldsymbol{V}, W_{H_i}] \\ \Delta \varphi = -4\pi e (n - n_0) \exp(e\varphi / T_e) \end{cases} \qquad (2.51)$$

化简为无量纲形式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi_x}(\Delta_{\xi\xi}+u)u=0 \tag{2.52}$$

其中，$\tau=\frac{1}{2}\omega_{p_i}t$，$u=\frac{v_x}{2c_s}$. 令 $u=u(\xi_x-\lambda\tau)$ 得

$$\Delta_{\xi\xi}u-(\lambda-u)u=0 \tag{2.53}$$

当 $\lambda=c^2>0$ 时，它具有当 $|\xi|\to\infty$ 时指数衰减的解. 最简单的为球对称情况：

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{du}{d\xi}-(c^2-u)u=0 \tag{2.54}$$

(2.54) 的解是存在的，为三维孤立子解，它是稳定的. 通过数值计算，可得图形如图 6-1.

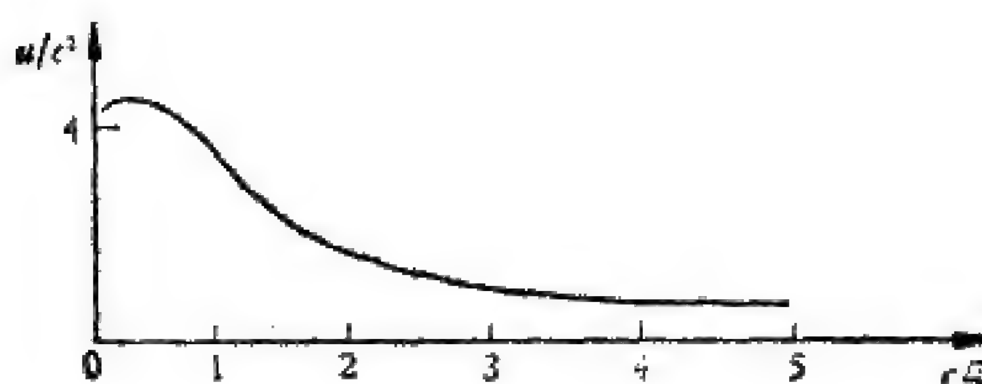


图 6-1

(VI) 二维 Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{tt}=\sin\varphi \tag{2.55}$$

在[9]中考虑它的三个孤立子解. (2.55)的形式解

$$\varphi(x,y,t)=4\tan^{-1}[g(x,y,t)/f(x,y,t)]$$

其中

$$f=1+a(1,2)e^{\eta_1+\eta_2}+a(1,3)e^{\eta_1+\eta_3}+a(2,3)e^{\eta_2+\eta_3}$$

$$g=e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_3}+a(1,2)a(1,3)a(2,3)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3}$$

$$a(i,j)=\frac{(p_i-p_j)^2+(q_i-q_j)^2-(\Omega_i-\Omega_j)^2}{(p_i+p_j)^2+(q_i+q_j)^2-(\Omega_i+\Omega_j)^2},$$

$$\eta_i = p_i x + q_i y - \Omega_i t - \eta_i^0 \text{（}\eta_i^0 \text{ 为常数）}$$

$$p_i^2 + q_i^2 - \Omega_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

且有

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & \Omega_1 \\ p_2 & q_2 & \Omega_2 \\ p_3 & q_3 & \Omega_3 \end{vmatrix} = 0$$

（VII）复非线性场方程

$$\nabla^2\phi - c^{-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = k^2\phi - \mu^2|\phi|^2\phi \qquad (2.56)$$

设 $\phi = \varphi(r)e^{i\omega t}$，其中 $\varphi(r)$ 为实的，且为球对称的，则(2.56)为

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \left(k^2 - \frac{w^2}{c^2}\right)\varphi - \mu^2\varphi^3 \qquad (2.57)$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad \varphi \to 0, \quad r \to \infty \qquad (2.58)$$

设 $k^2 - w^2/c^2 > 0$，作变换

$$r' = r(k^2 - w^2/c^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi' = \mu\varphi(k^2 - w^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

则 φ' 满足方程

$$\frac{d^2\varphi'}{dr'^2} + \frac{2}{r'}\frac{d\varphi'}{dr'} = \varphi' - \varphi'^3$$

可以证明(2.56)的解 $\phi = \varphi(r)e^{i\omega t}$ 对于小扰动是不稳定的。

第三节　多维孤立子的稳定性和坍塌

在等离子体物理和各种场模型中，对于孤立子的最重要和最自然的要求之一是它必须是稳定的，即从“过程”的观点来看，孤立子必须具有充分长的寿命．换言之，孤立子寿命必须比孤立子相互作用特征时间长得多．这方面的稳定性依扰

动方向有"纵向"稳定性和"横向"稳定性．从稳定性的分析和处理上，有线性稳定性和非线性稳定性两种．非线性稳定性一般指依某种泛函的稳定性．物理上通常考虑的这种稳定性意味着依系统的能量取极小．在多维情况下，很多的孤立波是不稳定的．

1. 我们首先从最简单情况开始，一个实的(不荷电的)标量场，由如下非线性波动方程

$$\Box\varphi + F'(\varphi) = 0 \qquad \left(\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad F'(\varphi) = \frac{dF}{d\varphi}\right) \tag{3.1}$$

所描述．恒稳场的哈密顿量为

$$E = \int\left[\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + F(\varphi)\right]dx = K + V \tag{3.2}$$

经过定标变换，$\varphi_\alpha = \varphi(\alpha x)$，有

$$E[\varphi_\alpha] = \alpha^{2-n}K + \alpha^{-n}V \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{dE}{d\alpha}\right|_{\alpha=1} = 0, \qquad V = \frac{2-n}{n}K \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{d^2E}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=1} = -2(n-2)K \tag{3.5}$$

由(3.4)，(3.5)可看到，$n = 1$ 给出了 E 的极小值，为稳定的；$n > 2$ 给出 $E[\varphi]$ 的极大值，是不稳定的；$n = 2$，则给出一个拐点．

2. 若荷电场存在 ($Q \neq 0$)，则上述情况发生质变． 如对于三维 FDS 非线性波动方程(2.39)，(2.40)，当

$$Q > Q_s = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\frac{\pi}{\alpha}\right)^4$$

可以证明 $E_{\min} < Q_m$ (对应于自由介子解)，它的孤立子解是

绝对稳定的.

3. φ^5 非线性波动方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = k^2\phi - \mu^2|\phi|^2\phi + \lambda|\phi|^4\phi \quad (3.6)$$

其中 λ 为实的,通常为正的. 考虑它的球对称解,(3.6)为

$$\frac{d^2\varphi'}{dr'^2} + \frac{2}{r'}\frac{d\varphi'}{dr'} = \varphi' - \varphi'^3 + \beta\varphi'^5 \quad (3.7)$$

其中,

$$\varphi' = \mu\varphi(1-\omega'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad r' = kr(1-\omega'^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \lambda k^2(1-\omega'^2)/\mu^4 \quad (3.8)$$

用一阶扰动理论和直接扰动方法均可证明(3.6)恒稳解的存在性.

4. 低压磁化等离子体中的三维离子声波方程(2.53). 它的能量为

$$\mathscr{H} = \int\left[\frac{1}{2}(D_\xi u)^2 - \frac{1}{3}u^3\right]d\xi$$

利用 Hölder 不等式

$$\int u^3 d\xi \leqslant \left(\int u^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int u^4 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

和 $\int u^4 d\xi$ 的插值不等式

$$\int u^4 dx \leqslant 4\left(\int u^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla u|^2 d\xi\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.9)$$

可得

$$\mathscr{H} \geqslant \int\frac{(\nabla u)^2}{2}d\xi - \frac{2}{3}\left(\int u^2 d\xi\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int(\nabla u)^2 d\xi\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\geqslant -\frac{1}{6}\left(\int u^2 d\xi\right)^3$$

由此推出泛函$\mathscr{H}$有下界,因而三维球对称孤立子解达到绝对

极小，故为稳定。

5. Langmuir 波的坍塌

和球形冲击波聚心效应的力学现象相类似，在“Langmuir 凝结”的耗散机制中，出现了类似现象——湍流能量在频谱的长波区域上的凝聚。这种聚结表明多维 Langmuir 孤立子的不稳定性。

例 1 在 φ^3 近似中 CLW 由方程

$$\nabla^2(i\phi_t + \nabla^2\phi) - \mathrm{div}(|\nabla\phi|^2\nabla\phi) = 0 \tag{3.10}$$

所描述，其中，ϕ 为高频势包络．考虑球对称情况，则 (3.10) 为

$$i\varphi_t + \nabla^2_{rr}\varphi - \frac{n-1}{r^2}\varphi + |\varphi|^2\varphi = 0 \tag{3.11}$$

其中，$\varphi = -\nabla\phi$，且 $\varphi(0) = 0$．(3.10)，(3.11)分别具有守恒量

$$s = \int |\nabla\phi|^2 d^3r, \quad s_2 = \int\left[|\nabla^2\phi|^2 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^4\right] d^3r \tag{3.12}$$

$$s = \int_0^\infty |\varphi|^2 r^2 dr$$

$$s_2 = \int_0^\infty \left[|(r\varphi)_r|^2 + 2|\varphi|^2 - \frac{1}{2} r^2|\varphi|^4\right] dr \tag{3.13}$$

考虑(3.11)的拟平面孤立子向原点加速运动(见图 6-2)．

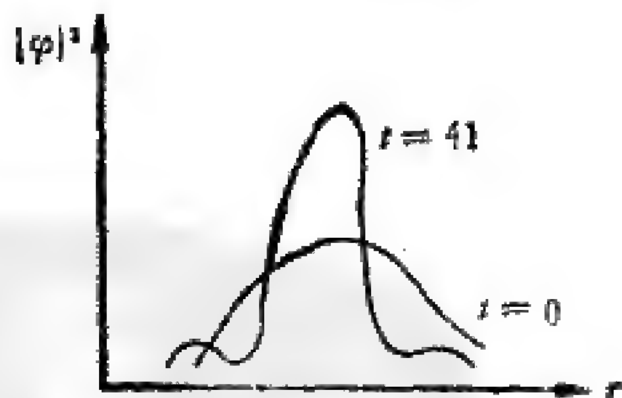


图 6-2

令 $D = \langle r^2\rangle\varphi = \int_0^\infty |\varphi|^2 r^4 dr$，由(3.11)可得

$$\frac{d^2D}{dt^2} = 6s_2 - 2\int_0^\infty |(r\varphi)_r|^2 dr - 4\int_0^\infty |\varphi|^4 r^2 dr < 6s_2$$

设 $s_2 \leqslant 0$，上式对 t 积分后有

$$D \leqslant 3s_2t^2 + c_1t + c_2$$

当 $t \to t_0 = \frac{c_1 + (c_1^2 + 12c_2|s_2|)^{\frac{1}{2}}}{6|s_2|}$，则初值问题的局部解引起奇异性. 若 $c_1 > 0$，对小的 t 波包弥散；相反 $c_1 < 0$，则导致收缩.

例 2 方程组

$$\operatorname{div}(-2i\nabla\psi_t - \nabla\nabla^2\psi + \Phi\nabla\psi) = 0 \tag{3.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi = \nabla^2(|\nabla\psi|^2) \tag{3.15}$$

引进低频势 u，

$$u_t = \Phi + |\varphi|^2 = \Phi + |\nabla\psi|^2 \tag{3.16}$$

$$\nabla^2 u = \Phi_t \tag{3.17}$$

$$\nabla^2(i\psi_t + \nabla^2\psi) = \operatorname{div}(\Phi\nabla\psi) \tag{3.18}$$

易得

$$s_2 = \int\left[|\nabla^2\psi|^2 + \Phi|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2\right]d^3r \tag{3.19}$$

设 $s_2 \leqslant 0$，对于方程组(3.16),(3.17),(3.18),在两种极限情况下,我们可求得自型变换. 在准静态极限下，它化为 (3.10)；在超声极限下,(3.16)右端可忽略 Φ .在第一种情形下,(3.10)的自型变换为

$$\phi = \exp\{-i\mu^2 \ln(t_0 - t)\}\chi(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t_0 - t}} \tag{3.20}$$

$\chi(\boldsymbol{\xi})$ 满足方程

$$\nabla^2\left(-\mu^2\chi + \frac{1}{2}i\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\chi + \nabla^2\chi\right) + \mathrm{div}\,(|\nabla\chi|^2\nabla\chi) = 0 \tag{3.21}$$

Zakharov 在[15]中在 $|\xi| \geqslant \frac{1}{\mu}$ 的区域得到(3.18)的一个球对称解，其中，χ 满足方程

$$i\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\chi = 2\mu^2\chi$$

故有

$$\chi \approx |\xi|^{-2i\mu^2}\chi_0$$

从(3.17)得

$$s_2(t) = s_2(0)/\sqrt{t_0 - t}$$

在超声极限下，作变换 $i\phi_t \to -\mu^2(t)\phi$，从(3.16)，(3.17)，(3.18)得

$$\nabla^2(-\mu^2(t)\chi + \nabla^2\chi) - \mathrm{div}\,(\Phi\nabla\chi) = 0 \tag{3.22}$$

$$\Phi_{tt} = \nabla^2|\nabla\chi|^2 \tag{3.23}$$

这方程组允许如下变换

$$\mu^2(t) = \frac{\mu_0^2}{t_0 - t}, \quad \chi = \frac{\eta(\xi)}{(t_0 - t)^{1-\frac{2}{n}}}$$

$$\Phi = \frac{D(\xi)}{(t_0 - t)}$$

$$\xi = r(t_0 - t)^{-\frac{2}{n}} \tag{3.24}$$

其中，n 为空间的维数．(3.24)的解有如下性质：

(i) (3.24)导致 $s_2 = 0$．

(ii) $\dfrac{\nabla^2\Phi}{\Phi_{tt}} \approx \dfrac{(t_0-t)^2}{r^2} \approx \dfrac{(t_0-t)^{2-\frac{4}{n}}}{|\xi|^2}$.

(iii) $|\varphi(0,\ t)|^2 = |\nabla\chi(0,\ t)|^2 = f(t) = \dfrac{f_0}{(t_0-t)^2}$.

(iv) $|\Phi(0,\ t)| = \varphi_0(t_0-t)^{\frac{4}{3}}$.

从(3.24)得出，对于平面孤立子，当 $t\to t_0$ 时，$\dfrac{\nabla^2\Phi}{\Phi_{tt}}\to\infty$，对于二维坍塌 $\nabla^2\Phi/\Phi_{tt}\to \text{const}$，最后在三维情形 $\Delta^2\Phi/\Phi_{tt}\to 0$。

若在三维空间 (r，z 坐标中)初始选择

$$\rho=\nabla^2\phi=\begin{cases}\rho_0\sqrt{w}\ \sin\dfrac{\pi z}{2}, & w>0\\ 0, & w\leqslant 0\end{cases} \tag{3.25}$$

$$w=1-\frac{1}{4}(r^2+z^2)$$

对于方程组(3.16)，(3.17)，(3.18)，我们也给出

$$\Phi(r,z,0)=-|\nabla\phi|^2,\ \Phi_t(r,z,0)=0$$

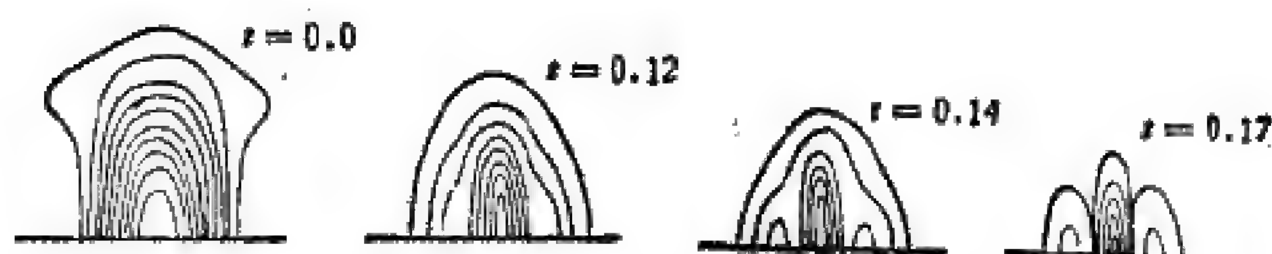


图 6-3

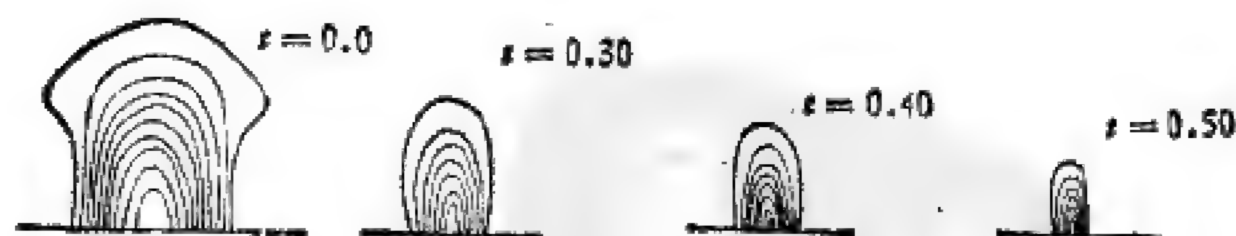


图 6-4

(3.25)描述 $t=0$ 时沿 z 轴指向的一个偶极子型电荷。

计算结果表明了某些时间的坍塌行为，事实上它为自型变换(3.24)很好地描述。见图 6-3、图 6-4 所示。

参 考 文 献

[1] G. H .Derrick, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1252.
[2] R. H. Hoburt, *Proc. Phys. Soc.*, **83** (1965), 610.
[3] M. S. Berger, *J. Funct. Anal.*, 9 (1972), 249—261.
[4] W. A. Strauss, *Comm. Math. Phys.*, **55**(1977), 149—162.
[5] J. Gibbons et, *J. Plasma Phys.*, **17** (1977), 153.
[6] R. C. Wang, *J. Math. Phys.*. **19** (1977), 1286.
[7] R. Friedberg, T. D. Lee and A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **D 13** (1976), 2739.
[8] V. E. Zakhatov, ЖЭТФ., **66** (1976), ВыП2,594.
[9] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan.*, **35** (1973), 1566.
[10] M. J. Ablowitz, *Studies in Appl. Math.*, **58** (1978), 17—94.
[11] V. G. Makhankov, *Phys. Reports, A review section of Phys. Lett. (section C).*, Vol. **35** (1978), No. 1.
[12] G. S. Maxon, *Lecture Notes in Phys.*, **64** (1977).
[13] D. Anderson, G. H. Derrick, *J. Math. Phys.*, **11** (1970), 1336—1346.
[14] V. E. Zakhatov, *Soviet Phys. JETP.*, **34** (1972), 62.
[15] L. M Degtyarev and V. E. Zakharov, *JETP Lett.*, **20**(1974), 165.
[16] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 249—314.
[17] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Soviet Phys. JETP.*, **34** (1972), 62.
[18] A. Shabat, *J. Funct. Anal.*, **9**(1975), 75.
[19] V. G. Makhankov, *Soviet Phys. JETP.*, **38** (1974), 248.

第七章　某些非线性进化方程的数值计算方法

第一节　引　　言

随着孤立子问题研究的深入开展，一大批具有孤立子解的非线性进化方程(一般它都具有色散项)的数值计算方法也应运而生,并得到了蓬勃的发展. 实际上,在孤立子问题开始取得引人注目结果的时候，有关非线性方程的数值计算结果已起了很重要的作用.例如,对于 KdV 方程,虽然在 1895 年已由 Korteweg de Vries 对孤立波作了解析处理,但对它的非线性现象的丰富内容却一无所知，直到 1965 年 Zabusky Kruskal 通过对调和晶格模型得到的 KdV 方程的数值计算，发现了孤立子相互作用后波形保持不变的这种极大稳定性之后，人们才对孤立子产生很大的兴趣和重视. 其他如 FPU 问题的计算以及 Perring 和 Syryme 对 Sine-Gordon 方程二个孤立子解(Kink) 的计算,都为物理上分析孤立子的存在性提供了重要依据. 随着孤立子问题研究的深入和复杂化，特别是对于多个孤立子、拟孤立子的相互作用,以及多维孤立子的存在和相互作用这些问题定性、定量的研究,数值计算发挥愈来愈重要的作用. 可以毫不夸张地说，对于激光和等离子体物理中的孤立子问题,数值计算已成为考察它的稳定性的主要工具.

对于这类具有孤立子解的非线性进化方程的数值计算，一般要求它计算是稳定的，能适应孤立子解变化梯度大以及计算格式较好地满足守恒律的特点. 通常用的数值方法有两

种，一种是有限差分法，另一种是函数逼近法，即有限元法和配置法.

现我们考虑一般的进化方程

$$u_t = L(u) \tag{1.1}$$

这里 $L(u)$ 为一般的非线性微分算子. 对于有限差分法，我们用差分算子 $L_h(u_m^n)$ 逼近 $L(u)$，其中，$u_m^n = u(x_m, t_n)$，$x_m = mh$，$t_n = nk$. 我们对时间导数的离散化通常采用下列几种方式：

$$u_m^{n+1} - u_m^n = kL_h(u_m^n) \tag{1.2}$$

$$u_m^n - u_m^{n-1} = kL_h(u_m^n) \tag{1.3}$$

$$u_m^{n+1} - u_m^{n-1} = 2kL_h(u_m^n) \tag{1.4}$$

我们知道，(1.2)为简单显式格式，(1.3)为简单隐式格式，(1.4)为"leapfrog"格式. 更为复杂而重要的格式还有两种，一种是 Crank-Nicholson 格式，它为(1.2)，(1.3)之和，而另一种跳点格式（Hopscotch 格式），当 $n+m$ 为奇数时它用(1.2)格式计算，而当 $n+m$ 为偶数时，它用(1.3)格式计算，这样联

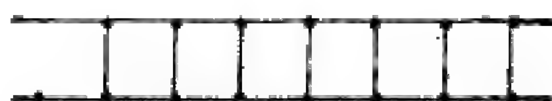


图 7-1

立计算的结果变成显式，如图7-1所示. 为使(1.3)变成显式，$L_h(u_m^n)$ 的非线性部分必须采用按空间的平均

$$L_h\left(\frac{1}{2}\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right)\right)$$

所有这些方法都必须满足稳定性的条件，否则计算无法进行下去. 对于线性方程来说，Crank-Nicholson 格式可能是最有效的，但对非线性方程，因在每一步都要解大量的非线性联立方程组，则是费事的. 众所周知，leapfrog 格式(1.4)对于线

性热传导方程是不稳定的，但对二阶双曲型方程，则是很适用的方法，至于 Hopscotch 格式是很简单的、快的和稳定的，但对抛物型方程时间步长必须受限制 $k \approx h^2$ 以保证合理的精度.

函数逼近方法，顾名思义，它是以有限维子空间定义的近似解逼近精确解 $u(x,t)$

$$u(x,t) \approx \tilde{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\varphi_i(x) \tag{1.5}$$

这里 $\varphi_i(x)$ 为逼近空间的基函数，如通常选取它为三角函数，则导致有限 F 氏变换或拟谱方法，分片多项式用局部基，我们就得到有限元方法，设 φ_i 满足边界条件，令

$$r(x,t) = \tilde{u}_t - L(\tilde{u}) = \sum_{i=1}^{N} \dot{c}_i(t)\varphi_i(x) - L(\tilde{u}) \tag{1.6}$$

要求剩余 $r(x,t)$ 依某种意义很小，如要求

$$\int_0^1 r(x,t)\varphi_j(x)dx = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{1.7}$$

此时即为 Galerkin 方法，(1.7)导致一系列常微分方程组.

如要求在某种给定的点集上(如高斯点)严格满足

$$r(x_j, t) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{1.8}$$

即得到配置法 (Collocation method)

以下我们对某些特殊的非线性进化方程具体讨论它们的数值方法和得到的计算结果.

第二节　KdV 方程的有限差分法和 Galerkin 有限元方法

在[1]中对如下形式的 KdV 方程的定解问题

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = \cos \pi x \tag{2.2}$$

$$u(x+2, t) = u(x, t) \tag{2.3}$$

进行了数值计算,采用如下差分格式

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - \frac{1}{3}\frac{k}{h}(u_{m+1}^n + u_m^n + u_{m-1}^n)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$$

$$-\left(\frac{\delta^2 k}{h^3}\right)(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n)$$

$$(m = 0, 1, 2 \cdots, 2N-1) \tag{2.4}$$

$$u_m^0 = \cos \pi x_m \tag{2.5}$$

$$u_m^n = u_{m+2N}^n \tag{2.6}$$

其中,k 为时间步长, $h = \frac{1}{N}$ 为空间步长 ,$u_m^n = u(mh, nk)$.

这种差分格式动量 $\sum_{m=0}^{2N-1} u_m^n$ 是守恒的,能量 $\sum_{m=0}^{2n-1} \frac{1}{2}(u_m^n)^2$ 几乎守恒,取 $\delta = 0.022$, 在这种情况下, 初始时色散相对于非线性项是很小的,因

$$\{\max|\delta^2 u_{xxx}|/\max|uu_x|\}_{t=0} = 0.004$$

计算结果分为三个时间阶段

(i) 起初,方程 (2.1) 的第一,第二项起支配作用,产生了通常的追赶现象, 此时解基本上由双曲型方程 $u_t + uu_x = 0$ 所决定, $u \approx \cos \pi(x - ut)$

(ii) 在 u 充分陡峭时,第三项变成重要的,它破坏了间断解的形成. 这时,小的波长的振动在左方发展起来,色散振动的振幅在增长,并最后形成一系列单个的孤立子.

(iii) 每个孤立子以均匀速度运动, 该速度正比于振幅,由于周期性,二个或更多的孤立子在空间重叠,产生非线性的相互作用. 在短短的相互作用之后, 它们再表现出不影响其大小和形状. 在图 7-2 中, 曲线 A 表示 $t = 0$ 初始值 (2.2),

曲线 B 表示当 $u=\cos(\pi x-ut)$ 在 $x=\frac{1}{2}$, $t=t_B=\frac{1}{\pi}$产生多值时(2.1)解的图象，曲线 C 表示 $t=3.6t_B$ 时色散结构充分发展为一系列孤立子的图象. 此时孤立子的最大值位置形成一条直线.

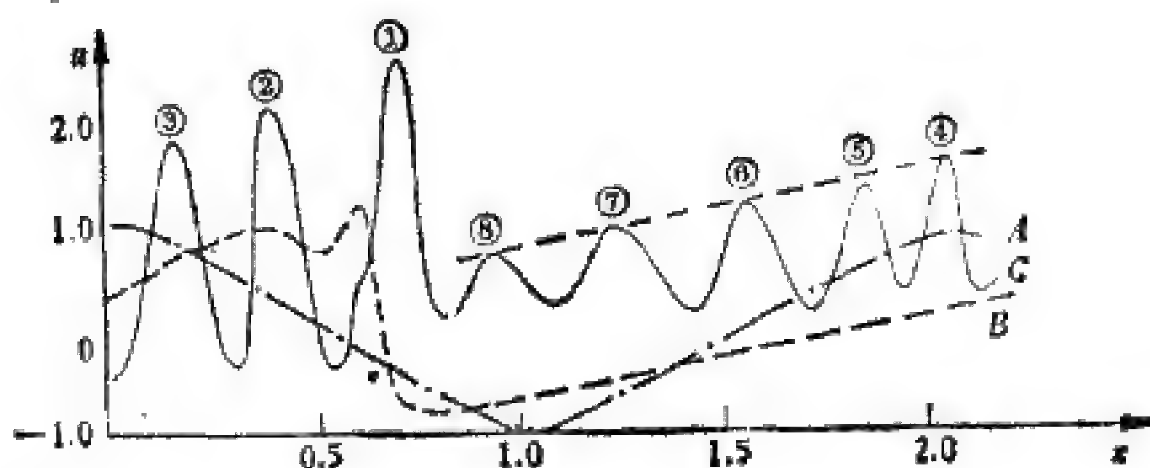


图 7-2

在[2]中对 Gauss 初始函数进行了计算. 即考虑初值问题

$$v_t+vv_x+\frac{1}{\sigma^2}v_{xxx}=0\quad(-\infty<x<\infty,\ t>0)\tag{2.7}$$

$$v\big|_{t=0}=\varphi(x)=e^{-x^2}\quad(-\infty<x<\infty)\tag{2.8}$$

发现当 $4<\sigma<7$ 时形成二个孤立子，当 $7<\sigma<11$ 时，有三个孤立子，当 $\sigma\approx 11$ 时有 4 个孤立子，当 $\sigma\approx 16$ 时，有 6 个孤立子，而当 $\sigma\ll\sigma_s=\sqrt{12}$ 时，不存在孤立子，仅有色散振动波，对于某些 σ 中间值，既有孤立子又有色散振动，如图 7-3 所示.

于此

$$\sigma_c=6\sigma_t^2\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(\xi)]^2d\xi\Big/\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\right)^3,\ \varphi(\xi)=e^{-\xi^2}$$

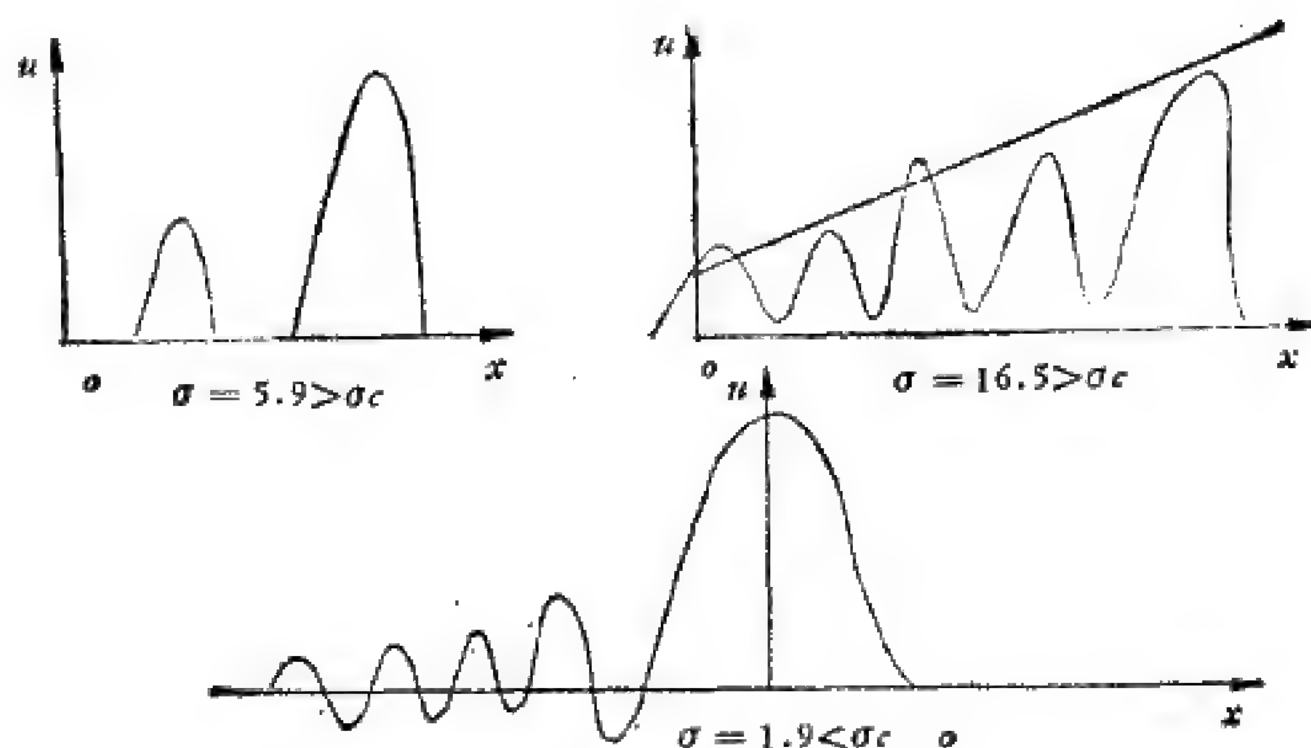


图 7-3

$$\sigma_c = \sqrt{12}$$

对于 KdV 方程的初值问题

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{2.9}$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2}[1 - \tanh(x - 25)/25] \tag{2.10}$$

采用(2.4)格式,计算结果如图 7-4 所示.

(2.4)是三层格式,开始一步可取为(非中心格式)

$$u_m^1 = u_m^0 - \frac{1}{6}\varepsilon\frac{k}{h}(u_{m+1}^0 + u_m^0 + u_{m-1}^0)(u_{m+1}^0 - u_{m-1}^0)$$

$$-\frac{1}{2}\mu\frac{k}{h^3}[u_{m+2}^0 - 2u_{m+1}^0 + 2u_{m-1}^0 - u_{m-2}^0]$$

这种格式和相应的方程的截断误差为 $O[k^3 + kh^2]$. 它的线性稳定条件为

$$\frac{k}{h}(\varepsilon|u_0| + (4r/h^2)) \leqslant 1, \ |u_0| \leqslant \max|u| \tag{2.11}$$

为了减少占过多的存储量,改用二层格式有 Hopscotch 方法,

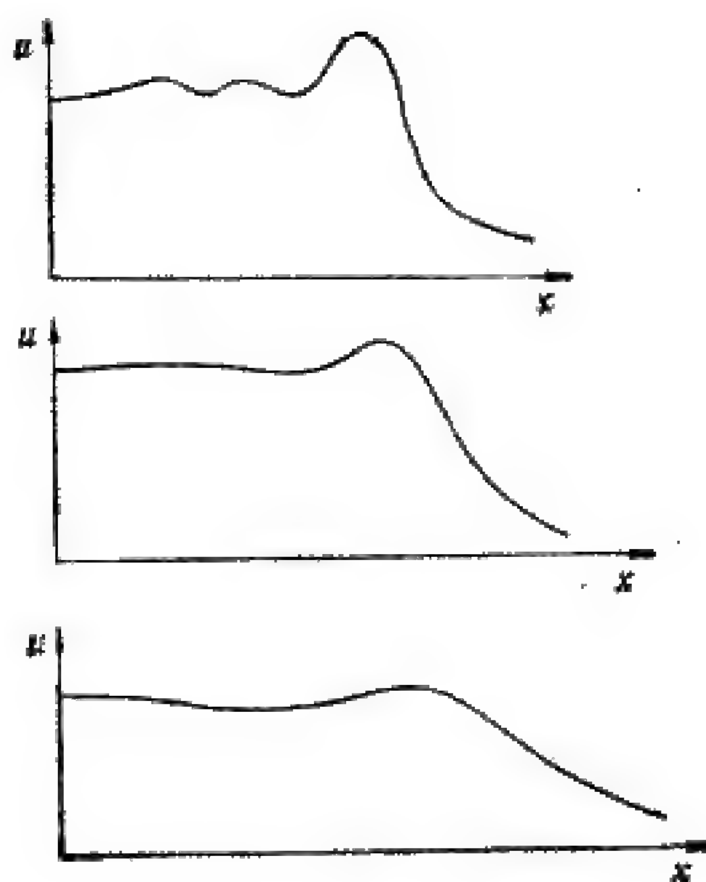


图 7-4

对于方程(2.9)，它的差分格式如下：

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{1}{2}\frac{k}{h}\varepsilon(f_{m+1}^n - f_{m-1}^n)$$
$$- \frac{k\mu}{2h^3}(v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n),$$
$$m + n \text{ 为奇数} \tag{2.12}$$
$$v_m^{n+1} = u_m^n - \frac{1}{2}\frac{k}{h}\varepsilon(f_{m+1}^{n+1} - f_{m-1}^{n+1})$$
$$- \frac{k\mu}{2h^3}(v_{m+2}^{n+1} - 2v_{m+1}^{n+1} + 2V_{m-1}^{n+1} - v_{m-2}^{n+1}),$$
$$m + n \text{ 为偶数}$$

不难验证它和方程(2.9)的截断误差为

$$kO\left(k^2 + \left(\frac{k}{h}\right)^2 + h^2\right)$$

它的线性稳定性条件是

$$\frac{k}{h}\left|\varepsilon|u_0| - (2\mu/h^2)\right| \leqslant 1 \tag{2.13}$$

由此可以看到，虽然H方法具有少存储量的优点，但时间步长比 Zabusky-Kruskal 格式要求的小。

对于 KdV 方程采用另一种数值方法，即用函数逼近的方法。我们考虑如下 KdV 方程的周期初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, & 0 < t \leqslant T, \ x \in R \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in R \\ u(x+1, t) = u(x, t), & \forall x, t \end{cases} \tag{2.14}$$

设 $u_0(x)$ 是具周期为 1 的函数，充分光滑，且(2.14)的解存在，充分光滑。我们取有限维子空间 S^μ 为：

$S^\mu = \{\chi(x),\ \chi \in [0, 1];\ \chi$ 周期扩张为 $C^k(R)$，$\chi(x)$ 在区间 $[ih, (i+1)h]$ $(i = 0, 1, \cdots, h^{-1})$ 为阶数小于 $\mu - 1$ 的多项式$\}$

且设 μ，k 为整数，$\mu - 1 > k \geqslant 0$，$k \geqslant 2$；现定义问题(2.14)的 Galerkin 近似为

$$(U_t + U_{xxx} + UU_x,\ \chi + h^3\chi_{xxx}) = 0,\ \chi \in S^\mu,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ U(0) \in S^\mu \tag{2.15}$$

我们有以下结果

定理 1 设 $k \geqslant 2$，初值 $U(0)$ 满足

$$\|U(0) - u_0\|_{L_2[0,1]} \leqslant C_1 h^\mu$$

则存在常数 C，h_0 依赖于 T，u_0 和 C_1 使得对于 $0 \leqslant t \leqslant T$，$0 \leqslant h \leqslant h_0$，问题(2.15)的 Galerkin 近似解存在，且有估计

$$\|U(t) - u(\cdot, t)\|_{L_2[0,1]} \leqslant Ch^\mu \tag{2.16}$$

关于 KdV 方程的数值计算及其方法的研究可参见[1]—[5]及邬华谟等的文章[19]。

第三节　非线性 Schrödinger 方程的有限差分法

我们考虑如下一类非线性 Schrödinger 方程的定解问题

$$iu_t - [a(x)u_x]_x + \beta|u|^2u + f(x)u = 0,$$
$$0 < x < 1,\ t > 0 \tag{3.1}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,\ t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{3.3}$$

其中，$i = \sqrt{-1}$，$\beta > 0$，$a(x)$，$f(x)$为已知函数，且 $a(x) \geqslant \alpha > 0$，$u_0(x)$ 为已知复值函数，$u(x,t)$ 为待求复值函数，设 $Q = [0,1] \times [0,T]$ 为矩形区域，我们以直线 $t = mk$，$x = ph$ 分区域又为许多小网格，其中 m 为整数，$m \in [0,[T/h]]$，p 为整数，$p \in [0,[h^{-1}]]$，如图 7-5 所示．设内点网格的全体为 Q_h，其余含边界点的网格为 s_h，以 $\Omega(t)$表示(t=const)$\cap Q_h$.

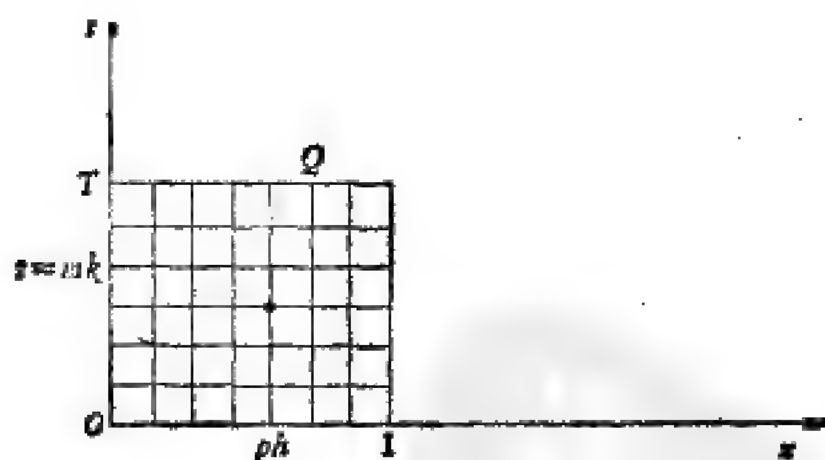


图　7-5

记

$$\varphi_x(x,t) = \frac{1}{h}[\varphi(x+h,t) - \varphi(x,t)] = D_+\varphi$$

$$\varphi_{\bar{x}}(x,t)=\frac{1}{h}[\varphi(x,t)-\varphi(x-h,t)]$$

$$\varphi_{\hat{x}}(x,t)=\frac{1}{2h}[\varphi(x+h,t)-\varphi(x-h,t)]$$

同样可定义 φ_t, $\varphi_{\bar{t}}$. 我们定义离散模如下:

$$\|\varphi\|^2_{D(t)}=h\sum_{Q}|\varphi|^2(x,t)$$

$$\|\varphi\|^2_{D_h}=kh\sum_{Q_h}|\varphi(x,t)|^2$$

$$\|\varphi\|^2_{l,Q}=\|\varphi\|^2_{D(t)}+\sum_{|l|\leqslant l}\|D^l_i\varphi\|^2_{D(t)}$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x_i\in\Omega}|\varphi(x_i)|,\ \|D^l_i\varphi\|_{L_\infty}=\sup_{x_i\in\Omega}|D^l_i\varphi|$$

我们考虑如下的四点隐式差分方程定解问题

$$i\varphi_{\bar{t}}-[b(x)\varphi_x]_{\bar{x}}+\beta|\varphi|^2\varphi+f(x)\varphi=0 \tag{3.4}$$

$$\varphi|_{s_h}=0,\ \varphi|_{t=0}=u_0(x) \tag{3.5}$$

对于(3.4),(3.5)的解,我们有如下的估计

引理 1 若满足下述条件

(i) $\beta>0$; $f(x)$, $b(x)$为实函数

(ii) $u_0(x)\in C^0$, 则有

$$\|\varphi\|^2_{D(T)}\leqslant 2\|u_0(x)\|^2_{L_2}=E_0 \tag{3.6}$$

证明 将(3.4)乘以 $\bar{\varphi}$, 得

$$i\varphi_{\bar{t}}\bar{\varphi}-\bar{\varphi}[b(x)\varphi_x]_{\bar{x}}+\beta|\varphi|^4+f(x)|\varphi|^2=0 \tag{3.7}$$

用分部求和及利用边界条件, 由(3.7)对 Q 求和并取虚部, 可得

$$\sum_{Q}(|\varphi|^2_{\bar{t}}+k|\varphi_{\bar{t}}|^2)=0$$

由此即得(3.6)

引理 2 若满足引理 1 的条件,且 $u_0(x)\in H^1$, $0\leqslant\alpha\leqslant b(x)\leqslant M$, $f\ |u_0|^2\in C^0$, $f(x)\geqslant 0$, 则有估计:

$$\frac{\alpha}{2}\|\varphi_x\|^2_{\Omega(T)} + \frac{\beta}{4}\|\varphi^2\|^2_{\Omega(T)} + \frac{1}{2}\|f^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2_{\Omega(T)}$$

$$\leqslant M\|u_0(x)\|^2_{L_2} + \frac{\beta}{2}\|u_0^2\|^2_{L_2} + \|f(x)u_0^2\|_{L_1} \quad (3.8)$$

证明 将(3.4)乘以 $\bar{\varphi}_t$，则有

$$i|\varphi_{\bar{t}}|^2 - \bar{\varphi}_t[b\varphi_x]_{\bar{x}} + \beta|\varphi|^2\varphi\bar{\varphi}_{\bar{t}} + f(x)\varphi\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0 \quad (3.9)$$

由(3.9)取虚部,乘以 τh 并对 Q 求和可得

$$\frac{\alpha h}{2}\sum_{\Omega(T)}|\varphi_x(T)|^2 + \frac{\beta h}{4}\sum_{\Omega(T)}|\varphi(T)|^4$$

$$+ \frac{h}{2}\sum_{\Omega(T)}f(x)|\varphi(T)|^2$$

$$\leqslant \frac{Mh}{2}\sum_{\Omega(0)}|\varphi_x(0)|^2 + \frac{\beta h}{4}\sum_{\Omega(0)}|\varphi(0)|^4$$

$$+ \frac{h}{2}\sum_{\Omega(0)}f(x)|\varphi(0)|^2$$

由此当 $h \leqslant h_0$ 时即得(3.8)

现考察以下差分定解问题

$$i\varphi_{\bar{t}} - [b\varphi_x]_{\bar{x}} + \beta|\varphi|^2\varphi + C(x,t,\varphi) + g(x,t) = 0 \quad (3.10)$$

$$\varphi|_{\Gamma_h=0}, \quad \varphi|_{t=0} = u_0(x) \quad (3.11)$$

对于(3.10),(3.11)的解 φ，我们有如下估计

引理 3 若满足条件

(i) β 为实数，$b(x)$为实函数

(ii) $|C(x,t,\varphi)\bar{\varphi}| \leqslant M|\varphi|^2$，$M$ 为正常数

(iii) $u_0(x) \in C^0$，$g(x,t) \in C^0(Q)$

则有

$$\|\varphi\|^2_{\Omega(T)} \leqslant 2(\|u_0\|^2_{L_2} + \|g\|^2_{L_2(Q)})e^{(2M+1)T} = C_2 \quad (3.12)$$

证明 类似于引理 1.

我们设定解问题(3.1),(3.2),(3.3)的光滑解在区域 $Q=$

$[0,1]\times[0,T]$上存在，现考虑和定解问题(3.1)—(3.3)相应的差分方程定解问题：

$$i\varphi_{\bar{t}}-[b(x)\varphi_x]_{\bar{x}}+\beta|\varphi|^2\varphi+f(x)\varphi=0 \quad (3.13)$$

$$\varphi|_{\Gamma_h}=0,\ \varphi|_{t=0}=u_0(x) \quad (3.14)$$

其中，$b(x)=a\left(x+\frac{h}{2}\right)$，我们有如下的收敛性定理.

定理1 若满足引理2的条件. 设$u(x,t)$、$\varphi(x,t)$分别为问题(3.1)—(3.3)和问题(3.13),(3.14)的解，则有

$$\|u-\varphi\|_{Q(T)}=O(k+h^2) \quad (3.15)$$

证明 因$u(x,t)$为定解问题(3.1)—(3.3)的光滑解，则依 Taylor 展开有

$$iu_{\bar{t}}-[b(x)u_x]_{\bar{x}}+\beta|u|^2u+fu=O(k+h^2)$$

其中，$b(x)=a\left(x+\frac{h}{2}\right)$. 令$\varepsilon(x,t)=u(x,t)-\varphi(x,t)$，则有

$$i\varepsilon_{\bar{t}}-[b(x)\varepsilon_x]_{\bar{x}}+\beta(|u|^2u-|\varphi|^2\varphi)+f\varepsilon=O(k+h^2) \quad (3.16)$$

$$\varepsilon|_{\Gamma_h}=0,\ \varepsilon|_{t=0}=0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\beta(|u|^2u-|\varphi|^2\varphi)&=\beta|u|^2(u-\varphi)+\beta\varphi(|u|^2-|\varphi|^2)\\&=\beta|u|^2\varepsilon+\beta\varphi(|u|+|\varphi|)(|u|-|\varphi|).\end{aligned}$$

由于假定(3.1)—(3.3)的解光滑且有界，又由引理2可得差分解φ的一致有界估计，故有

$$|\bar{\varepsilon}\beta(|u|^2u-|\varphi|^2\varphi)|\leqslant M|\varepsilon|^2$$

其中，$M=|\beta|[\|u\|_\infty^2+\|\varphi\|_{L_\infty}(\|u\|_{L_\infty}+\|\varphi\|_{L_\infty})]$，利用引理3(注意当$f(x)$为实函数时，估计与它无关)于是可得

$$\|\varepsilon\|_{Q(T)}^2\leqslant 2\|O(k+h^2)\|_Q^2e^{(2M+1)T}$$

定理证毕.

定理2 差分方程(3.13),(3.14)的解φ关于模$\|\cdot\|_Q$依

初始值是稳定的.

证明 与定理 1 的证明类似.

对于六点对称格式 (Crank-Nicalson 格式):

$$
\begin{aligned}
i\varphi_{\bar{t}} - \frac{1}{2}\left[(b\varphi_x)_{\bar{x}} + (b\varphi_x(t-k))_{\bar{x}}\right] \\
+ \frac{\beta}{2}\left[|\varphi(t)|^2\varphi(t) + |\varphi(t-k)|^2\varphi(t-k)\right] \\
+ f(x)\frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(t-k)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\varphi|_{s_h} = 0,\ \varphi|_{t=0} = u_0(x) \tag{3.19}
$$

于此,$b(x) = a\left(x + \frac{h}{2}\right)$, 我们有如下结果

定理 3 设 $u(x,t)$, $\varphi(x,t)$ 分别为问题 (3.1)—(3.3) 和问题(3.18),(3.19)的解,则有

$$
\|u - \varphi\|_{Q(T)} = O(k^2 + h^2) \tag{3.20}
$$

证明 与定理 1 的证明类似.

定理 4 差分方程(3.18),(3.19)依模 $\|\cdot\|_Q$ 关于初始值是稳定的.

对于非线性代数方程组(3.13),(3.14)的解法, 一般可采取追赶迭代法.

数值计算表明,如下的问题(3.1)—(3.3)的守恒格式

$$
\begin{aligned}
i\varphi_{\bar{t}} - \frac{1}{2}\left[(b\varphi_x)_{\bar{x}} + (b\varphi_x(t-k))_{\bar{x}}\right] \\
+ \frac{\beta}{4}\left[|\varphi(t)|^2 + |\varphi(t-k)|^2\right] \\
\cdot (\varphi(t) + \varphi(t-k)) \\
+ f(x)\frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(t-k)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\varphi|_{s_h} = 0,\ \varphi|_{t=0} = u_0(x) \tag{3.22}
$$

具有较六点对称格式有更好的守恒性质．因而，计算结果较好．例如，在[11]中对如下定解问题

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \\ u|_{t=0} = \operatorname{sech}(x+10)\exp(2i(x+10)] \\ u|_{x=\pm 15} = 0 \end{cases}$$

利用格式(3.21)进行了计算，它和精确解

$$u(x,t) = \operatorname{sech}(x+10-4t)\exp[2i(x+10)-3it]$$

比较，具有较好的精度．

关于非线性 Schrödinger 方程及其方程组（包括多维的）的数值计算方法可参见[7]—[9]．

第四节 RLW 方程的数值计算

对于正则长波方程（RLWE）

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{4.1}$$

BBM 在[16]中已证明它的解的存在、唯一性．我们可用如下的三层差分格式逼近它：

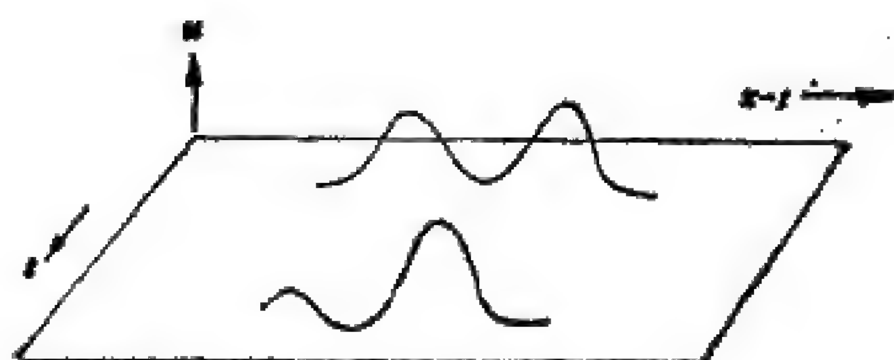
$$\begin{aligned} & w_{m-1}^{n+1} - (2+h^2)w_m^{n+1} + w_{m+1}^{n+1} \\ & \quad = w_{m-1}^{n-1} - (2+h^2)w_m^{n-1} + w_{m+1}^{n-1} - kh(1+w_m^n) \\ & \qquad \cdot (w_{m+1}^n - w_{m-1}^n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

显然，格式(4.2)和方程(4.1)的截断误差为

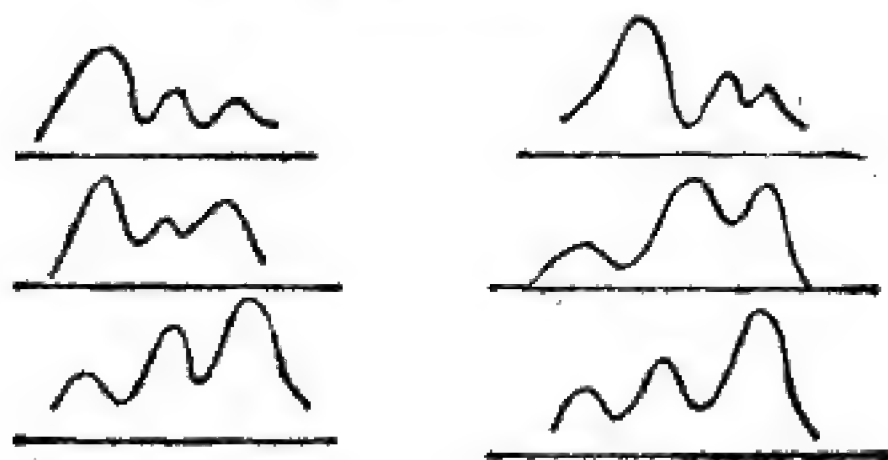
$$\frac{h^2}{6}u_{xxt}(1+u) + (k^2/6)u_{ttt}$$

在实际计算中若 $u \ll 1$，且 $u_t \sim u_x$，则当 $h = k$ 两项可能相消．用这种格式计算了二个孤立子和三个孤立子之间的相互作用如图 7-6 所示．

更精确的差分格式计算表明较强的二个孤立子是非弹性的，存在一小的振动尾巴．



(a) 二个孤立子的相互作用



(b) 三个孤立子的相互作用

图 7-6

对于(4.1)的其他差分格式，如：

$$u_t - u_{\hat{x}} + \frac{1}{2}(u^2)_{\hat{x}} - u_{x\bar{x}t} = 0 \tag{4.3}$$

和

$$u_t - u_{\hat{x}} + \frac{1}{3}((u^2)_{\hat{x}} + uu_{\hat{x}}) - u_{x\bar{x}t} = 0 \tag{4.4}$$

均可采用。

第五节　非线性 Klein-Gordon 方程的数值计算

对于非线性波动方程

$$u_{tt} - u_{xx} + F'(u) = 0 \tag{5.1}$$

$F'(u)$ 不同形式的选取，在孤立子的研究中起着重要的

作用,如:

$$F'(u,\lambda)=\sin u+\lambda\sin 2u \quad \text{(Double Sine-Gordon)} \tag{5.2}$$

$$F'(u,\lambda)=\sin u \quad \text{(Sine-Gordon)} \tag{5.3}$$

$$F'(u)=-u+u^3 \quad (\varphi_-^4) \tag{5.4}$$

$$F'(u)=u-u^3 \quad (\varphi_+^4) \tag{5.5}$$

$$F'(u)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & 2n\pi<u\leqslant(2n+1)\pi\\ 0, & u=n\pi\\ -\dfrac{\pi}{4}, & (2n+1)\pi<u<(2n+2)\pi\end{cases} \tag{5.6}$$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

对于SG,曾考虑二种简单的计算方法,其一是简单的Leapfrog格式.

$$u_m^{n+1}=-u_m^{n-1}+\frac{k^2}{h^2}\left[u_{m+1}^n+u_{m-1}^n\right]+2\left[1-\frac{k^2}{h^2}\right]u_m^n-k^2\sin u_m^n \tag{5.7}$$

通过线性稳定性分析可知,这个格式当 $k=h$ 是不稳定的,当 $k=0.95h$,则可克服不稳定性.它对二个 Kink 的情况作了数值计算.另一种格式是将原方程化为一阶方程组形式,即

$$\begin{cases}u_x+u_t=v\\ v_x-v_t=\sin u\end{cases} \tag{5.8}$$

再引进 $\xi=t-x,\ \eta=t+x$,(5.8)化为

$$u_\eta=\frac{1}{2}v,\quad v_\xi=-\frac{1}{2}\sin u \tag{5.9}$$

称它为特征形式,此时特征线为直线,采用预先校正格式解常微分方程,此种格式虽然较为精确,但要迭代较费时间.

在[16]中 Ablowitz 等提出新的格式. 对于方程(5.1),

记 $u_m^n = u(mh, nh)$, $v_m^n = u\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h, \left(n+\frac{1}{2}\right)h\right)$,

$w_m = u_t(mh, 0)$

$$v_m^0 = \frac{1}{2}(u_m^0 + u_{m+1}^0) + \frac{h}{4}(w_m + w_{m+1}) - \frac{h^2}{8}F'\left(\frac{u_m^0 + u_{m+1}^0}{2}\right) + O(h^3) \tag{5.10}$$

$$u_m^{n+1} = -u_m^n + v_m^n + v_{m-1}^n - \frac{h^2}{4}F' \cdot \left(\frac{v_m^n + v_{m-1}^n}{2}\right) + O(h^4) \tag{5.11}$$

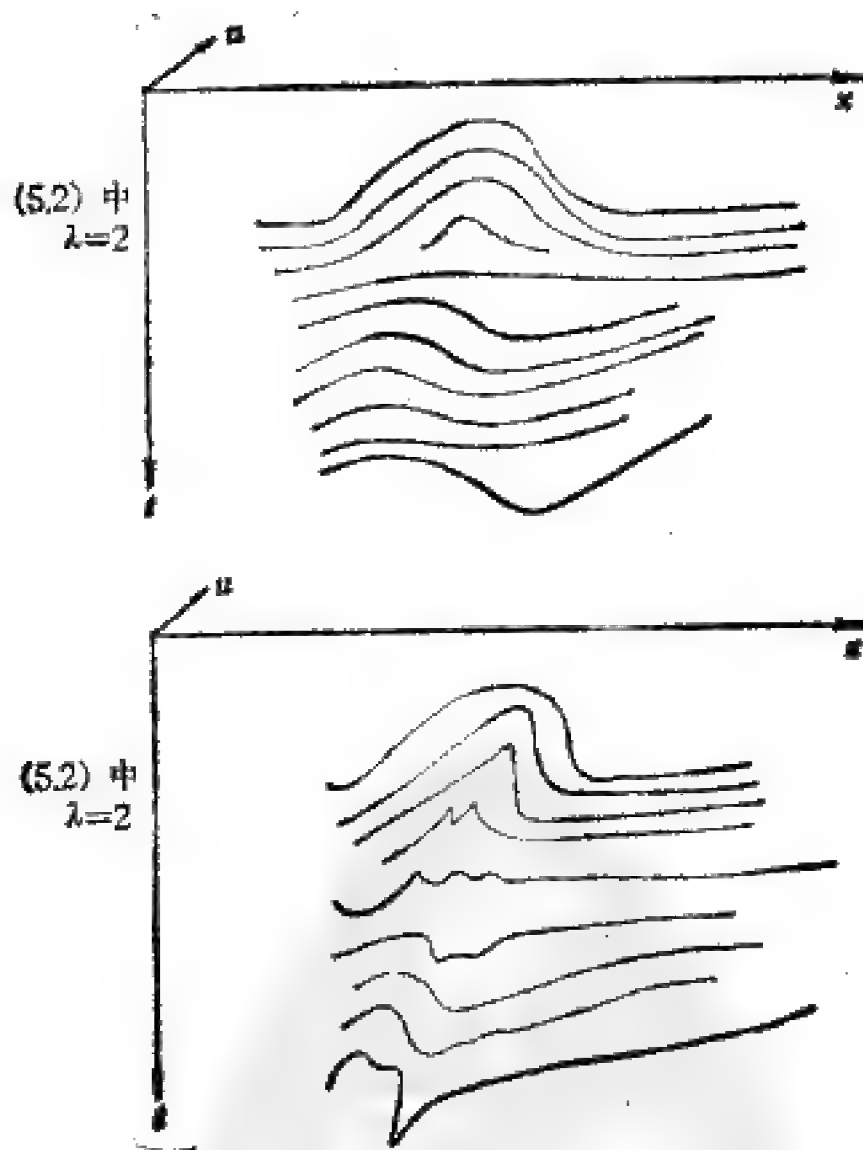


图 7-7

$$v_m^{n+1} = -v_m^n + u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1} - \frac{h^2}{4} F'$$

$$\cdot \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1}}{2}\right) + O(h^4) \qquad (5.12)$$

并取周期条件 $u_{2p+h}^n = u_h^n$，$2p$ 为周期.

由格式(5.10)，(5.11)，(5.12)对 DSG 方程和 φ_-^4 方程的二个 Soliton 的相互碰撞作了计算. 计算结果如图 7-7 所示.

第六节　一类非线性波稳定性问题的数值计算

等离子体动力学方程组是一组比较复杂的方程. 于敏给出了无外磁场、初始密度均匀的高低频、双流体等离子体动力学方程组，在[29]中，又在一定的假定下，给出了这组方程的平面一维形式

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i v_i)}{\partial x} = 0 \qquad (6.1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - e^{\varphi - \psi_1^2 - \psi_2^2} + n_i = 0 \qquad (6.3)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - (e^{\varphi - \psi_1^2 - \psi_2^2} - 1)\psi_2 = 0 \qquad (6.4)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + (e^{\varphi - \psi_1^2 - \psi_2^2} - 1)\psi_1 = 0 \qquad (6.5)$$

其中，n_i 为离子密度，v_i 为离子速度，$n_e = e^{\varphi - \psi_1^2 - \psi_2^2}$ 为低频电子数密度，φ 为势函数，ψ_1，ψ_2 是描述高频场振幅的量，μ 为常数.

若命 $n_i(x, t)$，$v_i(x, t)$，$\varphi(x, t)$，以及

$$\phi(x, t) = \sqrt{\phi_1^2(x, t) + \phi_2^2(x, t)}$$

均为 $\xi = x - ct$ 的函数，则可得到这组方程的孤立波解应满足的方程为

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = e^{\varphi-\phi^2} - \left(1 - \frac{2}{c^2}\right)\varphi^{-\frac{1}{2}} \tag{6.6}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = (e^{\varphi-\phi^2} - 1 + a^2)\phi \tag{6.7}$$

$$n_i = \left(1 - \frac{2}{c^2}\right)\varphi^{-\frac{1}{2}} \tag{6.8}$$

$$v_i = c\left[1 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{6.9}$$

其中，a，c 为参数，c 表示孤立波的传播速度，a 表示高频电场的频率相对于某固定频率的偏离.

(6.6)，(6.7)形成封闭系统，它的定解条件为

$$\varphi = 0, \quad x \to \pm\infty \tag{6.10}$$

$$\phi = 0, \quad x \to \pm\infty \tag{6.11}$$

在[2]中讨论了(6.6)，(6.7)，(6.10)，(6.11)的解及其性质，通过数值计算给出了各种参数 a，c 的孤立波解. 这些孤立波是否稳定？这是人们关心而又是必须回答的问题. 由于方程组(6.1)—(6.5)相当复杂，要通过解析的定性分析得到答案是困难的. 沈隆钧等通过实际数值计算来考虑这类波的稳定性.

(6.1)—(6.5)的初始条件为

$$n_i(x, 0)| = n_i^0(x),\ v_i(x, 0) = v_i^0(x),\ \phi_1|_{t=0} = \phi_1^0(x),$$
$$\phi_2|_{t=0} = \phi_2^0(x) \tag{6.12}$$

且设当

$$x \to \pm\infty \text{ 时}, n_i \to 1, v_i \to 0, \varphi \to 0, \phi_1 \to 0, \phi_2 \to 0 \tag{6.13}$$

我们看到，问题(6.1)—(6.5)的柯西问题为无穷区间上的问题，对于有限差分计算来说，有限区间近似计算总带来一些误差. 为此，可施行空间变量的变换

$$\xi = \operatorname{th} \lambda x \tag{6.14}$$

这一变换将 x 的区间$(-\infty, \infty)$变为 ξ 的区间$(-1, +1)$方程(6.1)—(6.5)相应变为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \lambda(1-\xi^2)\frac{\partial n_i v_i}{\partial \xi} = 0 \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda(1-\xi^2)v_i\frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \lambda(1-\xi^2)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \tag{6.16}$$

$$\lambda^2(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}(1-\xi^2)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - e^{\varphi-\psi_1^2-\psi_2^2} + n_i = 0 \tag{6.17}$$

$$\mu\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \lambda^2(1-\xi^2)\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - (e^{\varphi-\psi_1^2-\psi_2^2} - 1)\phi_2 = 0 \tag{6.18}$$

$$\mu\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \lambda^2(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}(1-\xi^2)\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + (e^{\varphi-\psi_1^2-\psi_2^2} - 1)\phi_1 = 0 \tag{6.19}$$

显然，$\xi \to \pm 1$，$n_i \to 1$，$v_i \to 0$，$\varphi \to 0$，$\phi_1 \to 0$，$\phi_2 \to 0$

(6.15)，(6.16)为流体力学型方程，可用 Richtimyer 的方法：

$$\frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{j+\frac{1}{2}}^{k}}{\Delta t} + \lambda(1-\xi_{j+\frac{1}{2}}^2)v_{j+\frac{1}{2}}^{k}\frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{k} - v_{j-\frac{1}{2}}^{k}}{\Delta \xi_j} + \lambda(1-\xi_{j+\frac{1}{2}}^2)\frac{\varphi_{j+1}^{k} - \varphi_j^{k}}{\Delta \xi_{j+\frac{1}{2}}} = 0, \quad \text{当} \quad v_{j+\frac{1}{2}}^{k} \geqslant 0 \tag{6.20}$$

$$\frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{j+\frac{1}{2}}^{k}}{\Delta t} + \lambda(1-\xi_{j+\frac{1}{2}}^2)v_{j+\frac{1}{2}}^{k}\frac{v_{j+\frac{3}{2}}^{k} - v_{j+\frac{1}{2}}^{k}}{\Delta \xi_{j+1}} + \lambda(1-\xi_{j+\frac{1}{2}}^2)\frac{\varphi_{j+1}^{k} - \varphi_j^{k}}{\Delta \xi_{j+\frac{1}{2}}} = 0, \quad \text{当} \quad v_{j+\frac{1}{2}}^{k} < 0 \tag{6.21}$$

$$\frac{n_i^{k+1} - n_i^k}{\Delta t} + \lambda(1-\xi_i^2) v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{n_i^k - n_{i-1}^k}{\Delta \xi_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$+ \lambda(1-\xi_i^2) n_i^k \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta \xi_i} = 0, \qquad (6.22)$$

当 $v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \geqslant 0$

$$\frac{n_i^{k+1} - n_i^k}{\Delta t} + \lambda(1-\xi_i^2) v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{n_{i+1}^k - n_i^k}{\Delta \xi_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$+ \lambda(1-\xi_i^2) n_i^k \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta \xi_i} = 0, \qquad (6.23)$$

当 $v_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} < 0$

我们知道，对于(6.17)，(6.18)，它的显式格式是绝对不稳定，而它的隐式格式是绝对稳定的，但为了计算方便起见，可采用如下的半显半隐格式：

$$\mu \frac{\phi_{1i}^{k+1} - \phi_{1i}^k}{\Delta t} = -\lambda^2(1-\xi_i^2)\frac{1}{\Delta \xi_i}$$

$$\cdot \left[\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i+\frac{1}{2}}} \phi_{2i+1}^k - \left(\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i-\frac{1}{2}}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot \phi_{2i}^k + \frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i-\frac{1}{2}}} \phi_{2i-1}^k\right]$$

$$+ \left(e^{\varphi_i^k - (\phi_{1i}^k)^2 - (\phi_{2i}^k)^2} - 1\right)\phi_{2i}^k \qquad (6.24)$$

$$\mu \frac{\phi_{2i}^{k+1} - \phi_{2i}^k}{\Delta t} = \lambda^2(1-\xi_i^2)\frac{1}{\Delta \xi_i}$$

$$\cdot \left[\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i+\frac{1}{2}}} \phi_{1i+1}^{k+1} - \left(\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i-\frac{1}{2}}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot \phi_{1i}^{k+1} + \frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta \xi_{i-\frac{1}{2}}} \phi_{1i+1}^{k+1}\right]$$

$$- \left(e^{\varphi_i^k - (\phi_{1i}^k)^2 - (\phi_{2i}^k)^2} - 1\right)\phi_{1i}^k \qquad (6.25)$$

这样，这两个方程不需迭代就可以直接求解．容易推得这样的格式需要满足稳定性要求：

$$\Delta t \leqslant \frac{\mu}{2} \Delta x^2$$

求得 n_i，ϕ_1，ϕ_2 后，可用迭代法解(6.17)：

$$\begin{aligned}
&\lambda^2(1-\xi_i^2)\frac{1}{\Delta\xi_i}\left[\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta\xi_{i+\frac{1}{2}}}\varphi_{i+1}^{k+1,s+1}\right.\\
&-\left(\frac{1-\xi_{i+\frac{1}{2}}^2}{\Delta\xi_{i+\frac{1}{2}}}+\frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta\xi_{i-\frac{1}{2}}}\right)\varphi_i^{k+1,s+1}\\
&\left.+\frac{1-\xi_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta\xi_{i-\frac{1}{2}}}\varphi_{i-1}^{k+1,s+1}\right]\\
&-e^{\varphi_i^{k+1,s}-(\phi_{1i}^{k+1})^2-(\phi_{2i}^{k+1})^2}+n_i^{(k+1)}=0 \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

沈隆钧等对一类所谓的非线性的呈单峰状的初始条件对问题(6.15)—(6.18)采用差分格式(6.20)—(6.26)进行了数值计算．数值计算结果表明，这类波形无变化，显示了问题(6.1)—(6.5)的孤立波较好的稳定性．如图 7-8 所示．

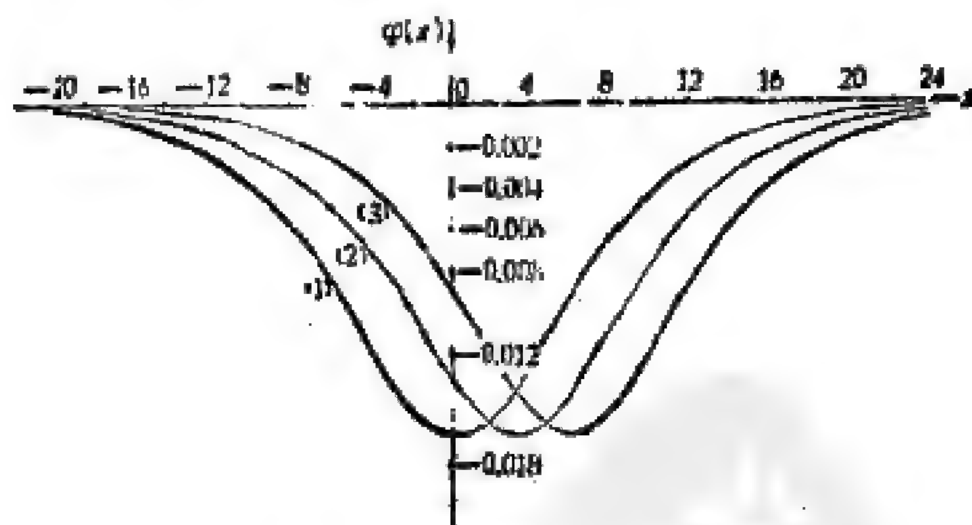


图 7-8 弱非线性的 φ 波形．

另外，还可求得(6.1)—(6.5)诸方程有如下守恒量

① $\int_{-\infty}^{\infty}(n_i-1)dx=\text{const}$

② $\int_{-\infty}^{\infty} v_t dx = \text{const}$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\varphi-\psi_1^2-\psi_2^2} - 1)dx = \text{const}$

④ $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \text{const}$

⑤ $$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_{1x}^2 - \psi_{2x}^2 + \frac{1}{2}\varphi(n + e^{\varphi-\psi_1^2-\psi_2^2}) + \frac{1}{2}nv^2\right) dx = \text{const}$$

由上述守恒量，我们可利用它检验差分格式的守恒性。

参 考 文 献

[1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.*, 15 (1965), 240—243.

[2] Y. A. Berezin, V. I. Karpman, *Sov. phys-JEFP*, Vol. **24** (1967), 1049—1056.

[3] J. Vliegenthart, *J. Engrg. Math.*, Vol. **51** (1971), 137.

[4] I. S. Greig and J. L. L. Morris, *J. Comput. Phys.*, Vol. **20** (1976), 647.

[5] J. C. Eilbeck and G. R. Mc Garre, *J. Comp. Phys.*, Vol. **19**(1975), 43.

[6] J. C. Eilbeck and G. R. Mc Garre, *J. Comp. Phys.*, Vol. **23**(1977), 63.

[7] 郭柏灵，计算数学，第三期，1981，211—223.

[8] 郭柏灵，许林宝，黄书科，中国科学，第六期，1983，485—494.

[9] 郭柏灵，常谦顺，科学探索，第一卷第四期，1981，13—22.

[10] 郭柏灵，常谦顺，科学通报，第十六期，1982，962—965.

[11] 常谦顺，科学通报，第二十六期，1981，1094.

[12] 郭柏灵，计算数学，第四期，1982，365—372.

[13] 郭柏灵，梁华湘，数值计算与计算机应用，第四卷，第三期，1983，176—182

[14] Guo Boling（郭柏灵）and Chang Qianshun（常谦顺）*JCM.*, Vol. **1**(1983), No. 4, 346—352.

[15] T. B. Benjamain, J. L. Bona, T. J. Mahony, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **47** (1972), A272, 47.

[16] J. Ablowitz, M. D. Kruskal and J. F. Ladik, *SIAM Appl. Math.*, Vol. **36** (1979), No. 3, 428—437.

第八章　孤立子的几何理论

第一节　Bäcklund 变换和总曲率 $K=-1$ 的曲面

我们在前面已经看到，Bäcklund 变换启示由 Sine-Gordon 方程的一个孤立子解去求另一个孤立子解，由非线性迭加原理，可简易地通过代数运算获得非线性方程的特解，这是一种非常巧妙的方法．我们下面介绍 Chern 和 Terng 所采取的几何的方法．对 Sine-Gordon 方程与 $K=-1$ 曲面的联系，以及对它的解的几何特征的研究表明：Sine-Gordon 方程求解的问题归结为由一个 $K=-1$ 曲面去求另一个 $K=-1$ 曲面的问题．

设 $M(u, v)$ 为一平面区域，R^3 为三维欧氏空间，$x: M \to R^3$ 为一曲面．在曲面上的每一点取定一个单位右手正交标架 $[x; e_1, e_2, e_3]$，$(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$，$(e_1, e_2, e_3)=1$，$1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 3$．假设 e_3 为法向量，于是有运动方程

$$dx = \sum_\alpha w_\alpha e_\alpha, \qquad w_3 = 0 \tag{1.1}$$

$$de_\alpha = \sum_\beta w_{\alpha\beta} e_\beta, \qquad w_{\alpha\beta} + w_{\beta\alpha} = 0 \tag{1.2}$$

其中，w_α，$w_{\alpha\beta}$ 均为一次微分式．

我们称 $\mathrm{I} = w_1^2 + w_2^2 (= dx \cdot dx)$

$$\mathrm{II} = w_1 w_{13} + w_2 w_{23} \quad (= -de_3 dx)$$

分别为曲面的第一和第二基本形式．

第八章　孤立子的几何理论

第一节　Bäcklund 变换和总曲率 $K=-1$ 的曲面

我们在前面已经看到，Bäcklund 变换启示由 Sine-Gordon 方程的一个孤立子解去求另一个孤立子解，由非线性迭加原理，可简易地通过代数运算获得非线性方程的特解，这是一种非常巧妙的方法．我们下面介绍 Chern 和 Terng 所采取的几何的方法．对 Sine-Gordon 方程与 $K=-1$ 曲面的联系，以及对它的解的几何特征的研究表明：Sine-Gordon 方程求解的问题归结为由一个 $K=-1$ 曲面去求另一个 $K=-1$ 曲面的问题．

设 $M(u, v)$ 为一平面区域，R^3 为三维欧氏空间，$x: M\to R^3$ 为一曲面．在曲面上的每一点取定一个单位右手正交标架 $[x; e_1, e_2, e_3]$，$(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$，$(e_1, e_2, e_3)=1$，$1\leqslant\alpha, \beta\leqslant 3$．假设 e_3 为法向量，于是有运动方程

$$dx=\sum_\alpha w_\alpha e_\alpha,\qquad w_3=0 \tag{1.1}$$

$$de_\alpha=\sum_\beta w_{\alpha\beta}e_\beta,\qquad w_{\alpha\beta}+w_{\beta\alpha}=0 \tag{1.2}$$

其中，w_α，$w_{\alpha\beta}$ 均为一次微分式．

我们称　$\mathrm{I}=w_1^2+w_2^2(=dx\cdot dx)$

$$\mathrm{II}=w_1w_{13}+w_2w_{23}\quad(=-de_3dx)$$

分别为曲面的第一和第二基本形式．

分别对(1.1),(1.2)作外微分,则得到结构方程:

$$\begin{cases} dw_1 = w_{12} \wedge w_2 \\ dw_2 = w_1 \wedge w_{12} \\ \mathrm{II} = -(dx, de_3) = aw_1^2 + 2bw_1w_2 + cw_2^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

于此

$$\begin{cases} w_{13} = aw_1 + bw_2 \\ w_{23} = bw_1 + cw_2 \\ dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2 \qquad \text{(Gauss 方程)} \end{cases} \tag{1.4}$$

此处, $K = ac - b^2$ 为 Gauss 曲率.

$$\begin{cases} dw_{13} = w_{12} \wedge w_{23} \\ dw_{23} = w_{12} \wedge w_{13} \end{cases} \tag{1.5}$$

于此 w_{12} 仅与第一基本形式有关,称为曲面的联络形式. 方程(1.5)称为 Codazzi 方程. 现考虑 $K = -1$ 的曲面. 取曲率线坐标.

$$\begin{cases} w_1 = \sin\phi du, \qquad w_2 = \cos\phi dv \\ w_{13} = \cos\phi du, \qquad w_{23} = -\sin\phi dv \\ w_{12} = -\phi_v du - \phi_u dv \end{cases} \tag{1.6}$$

代入 Gauss 方程得

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = -\cos\phi\sin\phi \tag{1.7}$$

由(1.7)可知

$$\mathrm{I} = \sin^2\phi du^2 + \cos^2\phi dv^2$$

$$\mathrm{II} = \sin\phi\cos\phi(dv^2 - du^2) \tag{1.8}$$

由此可见, 2ϕ 为渐近线 $\dfrac{d\phi}{du} = \pm 1$ 的夹角,而从方程(1.8)可以看出, 2ϕ 作为 (u, v) 的函数,就是 Sine-Gordon 方程的解. 反之由曲面论的基本定理, Sine-Gordon 方程的任一解可看作一个 $K = -1$ 曲面的渐近线之间的夹角. 于是,求 Sine-Gordon 方程的解就归结为求 $K = -1$ 曲面的问题. 我们知

道 $K=-1$ 曲面是伪球面，即是有奇点的喇叭形曲面。我们可通过一个假球线索给出 $K=-1$ 曲面之间的对应。

所谓线索是指欧氏空间依赖于两个参数(u,v)的直线族。

$$y=\chi(u,v)+\lambda n(u,v) \tag{1.9}$$

$n^2=1$，$\chi(u,v)$ 一般表示为一张曲面，若固定 (u,v)，则 (1.9) 表示过点 $\chi(u,v)$，方向为 $n(u,v)$ 的一条直线。若 $(u(t),v(t))$ 为曲面上的一条曲线，则：

$$y(t,\lambda)=\chi(u(t),v(t))+\lambda n(u(t),v(t))$$

为一直纹面。这个直纹面是可展曲面的必要充分条件是：

$$|n,dx,dn|=0 \tag{1.10}$$

这里，$|n,dx,dn|$表示n，dx 和 dn 的混合积行列式，(1.10)是关于 du，dv 的一个二次齐次方程，若其比值 $\dfrac{du}{dv}$ 有二个不同的实解，则对应有曲面的两族曲线。过族中每一曲线的线索中的直线构成一可展曲面，这时就得到两族可展曲面，每一可展曲面有一脊线，每一族可展曲面的全体脊线构成一张曲面，称为焦曲面。于是便得到两个焦曲面，设为 s 和 s'，线索 (1.9) 中的每一条直线都是 s 和 s' 的公切线。于是通过这些公切线，线索(1.9)就给出了焦曲面 s 和焦曲面 s' 之间的一个变换

$$l: s\to s'$$

这就是说，若 $p'=l(p)$，则 $p(\in s)$ 和 $p'(\in s')$ 有属于线索(1.9)的公切线l。

定义 线索称为假球的，如果 1) $|pp'|=r$（常数），即对应点之间的距离为定值。2) $\langle e_3(p),e_3'(p)\rangle=\tau$（常数），即对应点的法向之间的夹角为定值。

定理（Bäcklund） 假球线索的两个焦曲面有相应的常数 Gauss 曲率

$$K = -\frac{\sin^2\tau}{r^2}$$

特别，若 $r=\sin\tau$，则 $K=-1$，于是由一个给定的 $K=-1$ 曲面去构成另一个 $K=-1$ 曲面的问题就归结为由给定的 $K=-1$ 曲面去构成假球线素的问题. 此时只须确定所求线素中各条直线的方向. 这时归结为求解一个完全可积的全微分方程

$$d\alpha + \sin\alpha w = \cos\tau w_{13} \tag{1.11}$$

其中，α 表示所求线素中直线与切点的主方向(即 u 曲线的方向)的夹角. 由(1.6)，(1.11)可得到下列完全可积的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases}\sin\tau(\alpha_u - \phi_v) = \cos\tau\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi \\ \sin\tau(\alpha_v - \phi_u) = -\cos\tau\sin\alpha\sin\phi - \cos\phi\cos\alpha\end{cases} \tag{1.12}$$

这时，所求曲面的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}' = \cos^2\alpha du^2 + \sin^2\alpha dv^2$$
$$\mathrm{II}' = \cos\alpha\sin\alpha(du^2 - dv^2)$$

可以看出，$2\alpha(u,v)$ 就是 Sine-Gordon 方程的一个解，于是由(1.12)，若给定 Sine-Gordon 方程的一个解 2ϕ，则可解出 Sine-Gordon 方程的另一个解 2α，由于(1.12)是完全可积的，实质上只需解一个常微分方程.

K. Tenenblat 和 C. L. Terng 还进一步讨论了在 $2n-1$ 维欧氏空间中的 n 维子流形的 Bäcklund 定理以及 Sine-Gordon 方程的高维推广[2],[3].

第二节 Lie 群和非线性进化方程

在第二章中，我们已详细地指出了 GGKM 和 AKNS 等

先后建立的用散射反演方法来精确求解非线性进化方程的方法，Chern 和 Peng[1] 指出，这些方程的代数基础在于李群和它们的结构方程. 他们从 2 × 2 实的么模李群 SL(2) 的结构出发，具体地自然地给出了高阶的 KdV 方程和 MKdV 方程. 从而使这些方程的几何意义比较明确. 运用群的运算也比较方便，Sasaki 在文献[4]中进一步建立了 AKNS 方程与负常曲率曲面之间的联系.

设:

$$SL(2, R) = \left\{X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc = 1\right\} \qquad (2.1)$$

为所有 2 × 2 实的么模矩阵的群. 它的右不变 Mauer-Carten 形式为:

$$w = dxX^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^1, & w_1^2 \\ w_2^1, & w_2^2 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

其中

$$w_1^1 + w_2^1 = 0$$

SL(2; R) 的结构方程或 Manren-Cartan 方程为

$$dw = w \wedge w \qquad (2.3)$$

或更详细一点，

$$\begin{cases} dw_1^1 = w_1^2 \wedge w_2^1 \\ dw_1^2 = 2w_1^1 \wedge w_1^2 \\ dw_2^1 = 2w_2^1 \wedge w_1^1 \end{cases} \qquad (2.4)$$

设 v 为 (x, t) 平面上的一个邻域，且考虑光滑映照

$$f:\ v \rightarrow SL(2; R) \qquad (2.5)$$

这些方式在李群中经过映射后成为 (x, t) 的函数.

$$
\begin{cases}
w_1^1 = \eta dx + A dt \\
w_1^2 = q dx + B dt \\
w_2^1 = r dx + C dt
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

这里,系数均为 (x, t) 的函数. 由于

$$
\begin{aligned}
dw_1 = w_1^2 \wedge w_2^1 &= (q dx + B dt) \wedge (r dx + C dt) \\
&= qr dx \wedge dx + (qC - Br) dx \wedge dt + BC dt \wedge dt
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
dw_1^1 = &A_x dx \wedge dt + A_t dt \wedge dt + \eta d^2 x + A d^2 t \\
&+ \eta_t dt \wedge dx + \eta_x dx \wedge dx, \\
dw_1^2 = &2 w_1^1 \wedge w_1^2 = 2(\eta dx + A dt) \wedge (q dx + B dt) \\
&= 2\eta q dx \wedge dx + 2(\eta B - A q) dx \wedge dt \\
&\quad + 2AB dt \wedge dt
\end{aligned}
$$

另外,

$$
\begin{aligned}
dw_1^2 = &q_x dx \wedge dx + q_t dt \wedge dx + q d^2 x + B_x dx dt \\
&+ B_t dt \wedge dt + B d^2 t
\end{aligned}
$$

dw_2^1 可同样计算.

由此可得:

$$
\begin{cases}
-\eta_t + A_x - qC + rB = 0 \\
-q_t + B_x - 2\eta B + 2qA = 0 \\
-r_t + C_x - 2rA + 2\eta A = 0
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

假设 $\eta = \text{const}$, 即视 η 为与 x, t 无关的参数. 现考虑几种特殊情况:

(1) $r = +1$, η 为常数, $q = u(x, t)$ 此时从(2.7)第三式解出 A, 从第一式解出 B 得

$$
\begin{cases}
A = \eta C + \dfrac{1}{2} C_x \\
B = -\dfrac{1}{2} C_{xx} - \eta C_x + uC
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

将(2.8)代入(2.7)的第二个方程得:

$$u_t = K(u) \tag{2.9}$$

其中

$$K(u) = u_x C + 2uC_x + 2\eta^2 C_x - \frac{1}{2} C_{xxx} \tag{2.10}$$

作为一个例子,我们取

$$C = \eta^2 - \frac{1}{2} u \tag{2.11}$$

则由(2.9)可得:

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} uu_x \tag{2.12}$$

这就是众所周知的 KdV 方程.

我们自然可取 C 为 η 的任意多项式. 因在(2.10)中,仅含 η^2,故可设 C 为 η^2 的多项式. 令

$$C = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} C_i(x, t)\eta^{2(n-i)} \tag{2.13}$$

其中,$C_i(x, t)$ 为 x, t 的函数,将(2.13)代入(2.10)并令 η^2 幂的系数为 0,我们可得

$$C_0 = \text{const} \tag{2.11}$$

$$C_{i+1,x} = -\frac{1}{2} u_x C_i - uC_{i,x} + \frac{1}{4} C_{i,xxx} \tag{2.12}$$

我们注意到后者正好是 KdV 方程守恒密度的循环公式.(2.9)的右端可写为:

$$K_n(x) = u_x C_n + 2uC_{n,x} - \frac{1}{2} C_{n,xxx} = -2C_{n+1,x} \tag{2.13}$$

这最后等式是作为定义引进的,更进一步能引进 C_i 的无穷序列,设(2.12)对一切 i 成立,$0 \leqslant i < \infty$ 称方程

$$u_t = K_n(u) \tag{2.14}$$

为 n 阶 KdV 方程，可以证明，C_j 为 u 及其逐次对 x 的导数的多项式. 例如，可求得

$$2C_1 = -u$$

$$\begin{aligned} 2C_{j+1} = & -\sum_{1\le k\le j} C_k C_{j+1-k} - u \sum_{0\le k\le j} C_k C_{j-k} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{0\le k\le j-1} C_k C_{j-k,xx} \\ & - \frac{1}{4} \sum_{1\le k\le j} C_{kx} C_{j-k,x}, \ j = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{2.15}$$

特别，$2C_2 = \frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{4}u_{xx}$

$$2C_3 = -\frac{5}{8}u^3 + \frac{5}{16}u_x^2 + \frac{5}{8}uu_{xx} - \frac{1}{16}u_{xxxx} \tag{2.16}$$

(2) 在(2.7)中，$q = r = V(x, t)$，且 η 为与 x, t 无关的参数，则(2.7)变成

$$\begin{cases} A_x = V(C - B) \\ V_t = B_x - 2\eta B + 2VA \\ V_t = C_x + 2\eta C - 2VA \end{cases} \tag{2.17}$$

(2.17)中最后二式能写成:

$$\begin{cases} (C - B)_x = 4VA - 2\eta(B + C) \\ V_t = \frac{1}{2}(B + C)_x + \eta(C - B) \end{cases} \tag{2.18}$$

令

$$C - B = \eta P, \ C + B = Q, \ A = \eta R \tag{2.19}$$

以上方程变成:

$$\begin{cases} R_x = VP \\ P_x = 4VR - 2Q \\ V_t = \frac{1}{2}Q_x + \eta^2 P \end{cases} \tag{2.20}$$

消去 P, Q，我们可得到：

$$V_t = M(V) \tag{2.21}$$

其中

$$M(v) = \eta^2 \frac{R_x}{V} + (VR)_x - \frac{1}{4}\left(\frac{R_x}{V}\right)_{xx}$$

取 $R = \eta^2 - \frac{1}{2}V^2$，方程(2.21)变成

$$V_t = \frac{1}{4}V_{xxx} - \frac{3}{2}V^2 V_x \tag{2.22}$$

这就是熟知的 MKdV 方程。

第三节　非线性方程的延拓结构

对于微分流形M和 n 形式理想 I，所谓外延拓是指M上的 $n-1$ 形式 P，系数取值于M上的可微函数．并满足：

$$dP \subset F^*(M) \wedge P + I \tag{3.1}$$

其中，$F^*(M)$为M上1-形式．1975年，Wohlquist 和 Estabrook 首先提出外延拓概念，并应用到 KdV 方程．他们把 KdV 方程表现为一组等价的外微分形式的闭理想．并将这个闭理想延拓，成功地找到了 KdV 方程的散射反演问题和 Bäcklund 变换，并在 [6] 中对非线性 Schrödinger 方程作了类似的讨论．Morris, Coroues,Gibbon等分别对有引力作用的浅水波动方程，Hirota 方程，非线性 Schrödinger 方程组、高阶 KdV 方程、自对偶 Yang-Mills 方程的外延拓结构作了讨论，如参见[7]，[8]，[9]，[11]，[12]，[14]，[15]，[16]，[18]，[19]．可以看出，延拓结构法不仅适用于大量的非线性进化方程，而且由它能比较自然地推广到高维空间中去，因此，在这方面它比散射反演法具有更大的优越性，而且这种微分几何法有可能成为散射反

演法的理论基础。

我们现在来考虑 KdV 方程的延拓结构法. 设有 KdV 方程为:

$$u_t + u_{xxx} + 12uu_x = 0 \tag{3.2}$$

令: $z = u_x$, $p = z_x = u_{xx}$, 于是(3.2)可写成一阶方程

$$u_t + p_x + 12uz = 0 \tag{3.3}$$

对 5 维流形 $M\{x, t, u, z, p\}$, 切空间的对偶空间 $T^*(M)$ 的基为 $\{dx, dt, du, dz, dp\}$. 在M的 2 维子流形 $\{x, t, u(x, t), z(x, t), p(x, t)\}$ 上引入 2-形式组

$$\begin{cases} \alpha_1 = du \wedge dt - z dx \wedge dt \\ \alpha_2 = dz \wedge dt - p dx \wedge dt \\ \alpha_3 = -du \wedge dx + dp \wedge dt + 12uz dx \wedge dt \end{cases} \tag{3.4}$$

其中, d 表示外导数, $\wedge$ 表示外积. (3.4) 前 2 项对应于引入新变元的项, 后一项则对应于原始方程的项, 由直接计算可得

$$\begin{cases} d\alpha_1 = dx \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_2 = dx \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_3 = -12dx \wedge (z\alpha_1 + u\alpha_2) \end{cases} \tag{3.5}$$

因此, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 在流形 M 上构成闭理想, 截到流形 $S_2 = \{u(x, t), z(x, t), p(x, t)\}$ 上时, 2-形式(3.4)为零. 这时外形式导数 KdV 方程. 对于给定的 5 维可微流形M以及 α_i 和 $d\alpha_i$ 所生成的闭理想, 存在附加的延拓变量 $y^i (i = 1, 2, \cdots, m)$, $\{y^i\}$ 在原始流形 $M(x, t, u, z, p)$ 的每一点张出一个 m 维流形, 延拓出一个 $m + 5$ 维纤丛. 于是可在纤维丛中生成扩大的理想 I', I' 的生成元不仅包括 α_i, 还包括由于延拓变量 y^i 而引入的m个 1-形式 w_i, 这些 W_i 称为外延拓形式, 对于外延拓变量 y^i, 有 Pfaff 形式 w_K.

$$w_K = dy^K + F^K(x, t, u, z, p, y^i)dx + G^K(x, t, u, z, p, y^i)dt \tag{3.6}$$

它们必须满足闭理想条件

$$dw_K = \sum_{i=1}^{3} f_k^i \alpha_i + \sum^{n} \eta_k^i \wedge w_i \tag{3.7}$$

其中，η_k^i 为 1-形式. 由(3.5),(3.6)可得 F^K 和 G^K 的一阶偏微分方程组. 这个方程组一般为非线性的. 因为其中含有对易子项

$$\sum_i \left(G^i \frac{\partial F^k}{\partial y^i} - F^i \frac{\partial G^k}{\partial y^i} \right) dx \wedge dt \tag{3.8}$$

若 F^k 和 G^k 仅依赖于 y^k, 这样的 y^k 决定一个通常的守恒律. 此时称 y^i 为势 (*potential*). 若 F^K 和 G^K 依赖于其中延拓变量 $y^i(i \neq k)$, 此时称 y^k 为膺势. 膺(拟)势的存在是导致 Bäcklund 变换的关键.

我们定义对易子:

$$[F \cdot G]^k \equiv F^i G^k_{,y_i} - G^i F^k_{,y_i} \tag{3.9}$$

由(3.7)并消去 f_k^i, 可得如下的 $F^k(u, z, p, y^i)$, $G^k(u, z, p, y^i)$ 满足的偏微分方程

$$F^k_{,z} = 0,\ F^k_{,p} = 0,\ F^k_{,u} + G^k_{,p} = 0 \tag{3.10}$$

$$zG^k_{,u} + pG^k_{,z} - 12uzG^k_{,p} + G^i F^k_{,y_i} - F^i G^k_{,y_i} = 0 \tag{3.11}$$

由方程组(3.10),(3.11)的可积条件,容易求出 F^k, G^k 的表达式

$$\begin{cases} F^k = 2X^k + 2uX_2^k + 3u^2X_3^k \\ G^k = -2(p + 6u^2)X_2^k + 3(z^2 - 8u^3 - 2up)X_3^k \\ \qquad + 8X_4^k + 8uX_5^k + 4u^2X_6^k + 4zX_7^k \end{cases} \tag{3.12}$$

将(3.12)式中给出的 F^k, G^k 的形式代入(3.11),可得一系列对易子关系:

$$\begin{cases} [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_6] = 0 \\ [X_1, X_2] = -X_7,\ [X_1, X_7] = X_5,\ [X_2, X_7] = X_6 \\ [X_1, X_5] + [X_2, X_4] = 0,\ [X_3, X_4] + [X_1, X_6] + X_7 = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

强迫这个开放的代数结构闭合为一个有限维的 Lie 代数,并利用 Jocobi 恒等式，我们可得到进一步的关系式. 引进新的生成元 X_8, X_9,

$$[X_3, X_4] = -X_8, \ [X_1, X_5] = X_9$$

我们要求

$$X_9 = \sum_{m=1}^{8} c_m X_m \qquad (3.14)$$

其中，c_m 为常数. 要求(3.13)中 1 至 8 生成元为线性无关. 利用 Jocobi 恒等式可得

$$c_m = 0(m \neq 7.8), \ c_7 = -c_8 \equiv \lambda$$

其中，λ 为任意常数. 最后我们得到由 $\{X_1, \cdots, X_8\}$ 组成的封闭 Lie 代数.

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = -X_7, [X_2, X_5] = -X_9/\lambda \\ [X_4, X_7] = -\lambda X_5 \\ [X_1, X_5] = X_9, [X_2, X_3] = X_6, [X_5, X_6] = X_9/\lambda \\ [X_1, X_6] = -X_9/\lambda, \ [X_3, X_4] = -X_8 \\ [X_5, X_7] = -X_5 - \lambda X_6 \\ [X_1, X_7] = X_5, \ [X_4, X_5] = -\lambda X_9, [X_6, X_7] = X_6 \\ [X_2, X_4] = -X_9, [X_4, X_6] = X_9, \ X_9 \equiv \lambda(X_7 - X_8) \end{cases} \qquad (3.14)'$$

不难得到这个代数的 8 维关系式. 取基矢量为

$$b_k = \frac{\partial}{\partial y^k} (k = 1, \cdots, 8) \qquad (3.15)$$

其中，y^k 的延拓变量的坐标集,生成元的非退化的表示为

$$
\begin{cases}
X_1 = \dfrac{1}{2}\,[b_1 + \exp(2y_3)^{-b_2} + y_8 b_3 + y_7 b_5 \\
\qquad\quad + (y_8^2 - \lambda) b_8] \\
X_2 = \dfrac{1}{2}\,[b_7 + 2b_8] \\
X_3 = \dfrac{1}{3}\, b_6 \\
X_4 = -\dfrac{1}{2}\,\lambda \left[b_1 + \exp(2y_3) b_2 + y_8 b_3 - b_4 \right. \\
\qquad\quad \left. + \left(\dfrac{3}{2\lambda}\right) y_6 b_5 + (y_8^2 - \lambda) b_8 \right] \\
X_5 = -\dfrac{1}{2}\,[\exp(2y_3) b_2 + y_8 b_3 + (y_8^2 + \lambda) b_8] \\
X_6 = b_8 \\
X_7 = \dfrac{1}{2}\left[b_3 + \dfrac{1}{2}\, b_5 + 2y_8 b_8 \right] \\
X_8 = \dfrac{1}{4}\, b_5
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

由(3.12),写出 8 个 Pfaff 形式的明显表达式,我们有:

$$
\begin{cases}
w_k = dy^k + F^k dx + G^k dt \\
w_1 = dy_1 + dx - 4\lambda dt \\
w_2 = dy_2 + \exp(2y_3) dx - 4\exp(2y_3)(u + \lambda) dt \\
w_3 = dy_3 + y_8 dx + [2z - 4y_8(u + \lambda)] dt \\
w_4 = dy_4 + 4\lambda dt \\
w_5 = dy_5 + y_7 dx + (z - 6y_6) dt \\
w_6 = dy_6 + u^2 dx + (z^2 - 8u^3 - 2up) dt \\
w_7 = dy_7 + u dx - (p + 6u^2) dt \\
w_8 = dy_8 + (2u + y_8^2 - \lambda) dx - 4 \\
\qquad \cdot \left[(u + \lambda)(2u + y_8^2 - \lambda) - \dfrac{1}{2}\, p - z y_8 \right] dt
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

利用(3.17),我们能得到 KdV 方程的孤立子解，Bäcklund 变换以及相应的散射反演问题.

事实上,从 $w_8 = 0$, 并记 $y_8 = y$, 有

$$\begin{cases} y_x = -(2u + y^2 - \lambda) \\ y_t = -4\left[(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda) + \dfrac{1}{2}p - zy\right] \end{cases} \tag{3.18}$$

(3.18)的第一式为 Riccati 方程. 令

$$y = \phi_x/\phi \tag{3.19}$$

则得

$$\phi_{xx} + (2u - \lambda)\phi = 0 \tag{3.20}$$

此即对应于 KdV 方程的一维 Schrödinger 方程. 从 Pfaff 形式 w_3 有

$$y = -y_{3,x}$$

由(3.19) 及 w_2 有

$$y_3 = -\ln\phi$$

令 $\varphi = \phi_x$, 则由(3.19)有

$$y = \varphi/\phi$$

令

$$w_9 \equiv \phi w_8 - \varphi w_3$$
$$w_{10} \equiv -\phi w_3$$

则有

$$\begin{cases} w_9 = d\varphi - (2u - \lambda)\phi dx + \{2z\varphi - [4(u + \lambda) \\ \qquad \times (2u - \lambda) + 2p]\phi\}dt \\ w_{10} = d\phi - \varphi dx - [2z\phi - 4(u + \lambda)\varphi]dt \end{cases} \tag{3.21}$$

由(3.21)可以看到, $\phi_x = \varphi$, $\varphi_x + (2u - \lambda)\phi = 0$. 为 KdV 方程的一阶散射方程组.

另方面,设 KdV 方程有其它解 $u' = u'(u, z, p, y')$ 它满足

$$\begin{cases}\alpha_1' = du' \wedge dt - z'dx \wedge dt \\ \alpha_2' = dz' \wedge dt - p'dx \wedge dt \\ \alpha_3' = -du' \wedge dx + dp' \wedge dt + 12u'z'dx \wedge dt\end{cases} \tag{3.22}$$

通过直接计算可得

$$u' = -u - y^2 + \lambda \tag{3.23}$$

因 $u = 0$ 为 KdV 方程的解，所以 $u_0' = -y^2 + \lambda$ 必须是解．从(3.18)有

$$\begin{cases}y_x = -(y^2 - \lambda) \\ y_t = 4\lambda(y^2 - \lambda) = -4\lambda y_x\end{cases} \tag{3.24}$$

它的解析积分为 $y = \lambda^{1/2}\tanh[\lambda^{1/2}(x - x_0 - 4\lambda t)]$.
u_0' 为解析 Soliton 解。

我们由 Pfaff 形式 w_7 得到

$$u = -y_{7,x} = -w_x$$

(3.23)可写成:

$$-w_x' = w_x - y^2 + \lambda = w_x + y_x - 2w_x \tag{3.25}$$

积分之并把积分常数并入位势中，有

$$y = w - w' \tag{3.26}$$

故方程(3.23)最终可写成:

$$-w_x' - w_x = u' + u = \lambda - (w' - w)^2 \tag{3.27}$$

于此，令 $\lambda = \kappa^2$，再由(3.24)和(3.26)，(3.18)的第二个方程可写成:

$$w_t' + w_t = 4(u'^2u^2 + u'u + u^2) + 2(w' - w)(z' - z) \tag{3.19}$$

联合(3.27)，(3.19)即得 KdV 方程的 Bäcklund 变换。

参 考 文 献

[1] S. S. Chern (陈省身), C. K. Peng (彭家贵), *Munscripta Math.*, 28 (1979), 207—217.
[2] Keti Tenenblat, and Chun-lian Terng (滕楚莲), *Annal. Math.*, 111

(1980), 477—490.
[3] Chun-Lian Terng (滕楚莲), *Annal. Math.*, **111** (1980), 491—510.
[4] Sasaki, *Nucl. Phys.*, **B154**(1979), 343.
[5] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1—7.
[6] F. B. Estabrook, H. D. Wahlquist, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 1293.
[7] H. C. Morris, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 1867.
[8] Corones, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 756.
[9] Corones, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 163.
[10] H. C. Morris, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 187.
[11] A. Roy, Chowdhowg, *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 1417.
[12] H. C. Morris, *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 327.
[13] H. C. Morris, *J Math. Phys.*, **18** (1977), 285.
[14] Dodd and Gibbon, *Proc. R. Soc. Lond A.*, **359** (1978), 411.
[15] Dodd and Gibbon, *Proc. Roy. Soc. Lond A.*, **358**(1977), 287.
[16] H. C. Morris, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 533.
[17] Tian Chou, Li Yi Shen, 数学年刊，英文版，第二卷，1981，11—16.
[18] H. C. Morris, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 1870.
[19] H. C. Morris, *In 1976 Amee Conference, Ed. by Hemamn.*
[20] 卢文等，中山大学学报，第三期，1979.
[21] 郭汉英等，数学物理学报，第三卷，第二期，1983，135—143.
[22] 郭汉英等，数学物理学报，第三卷，第一期，1983，241—247.

第九章　非线性进化方程的整体解及其"blow up"问题

第一节　非线性进化方程及其积分估计方法

最近以来，随着孤立子问题及其理论的发展，一大批具有孤立子解的非线性进化方程日益引起人们的注意．如：KdV 方程，非线性 Schrödinger 方程，RLW 方程，非线性 Klein-Gordon 方程等．这些方程除了具有孤立子的这个重要特征之外，还具有其它的明显物理特性：色散性和非线性的统一；有一定的波动性，但它的解又具有一定的光滑性；$t\to\infty$（或 $x\to\infty$）解的衰减性、散射性．由于它和物理问题紧密相连，对于它的解法和性质的理论研究，早已超出了传统的研究方法．例如，出现了散射反演这种崭新的、精确的、十分重要的求解方法，并已为微分方程的理论研究开辟了新的途径；Bäcklund 变换的方法；用微分几何外微分形式和李群建立起来的延长结构法等．同时，就这类非线性偏微分方程本身理论研究而言，已不能照搬过去一些传统的做法．例如：对于 KdV 方程，非线性 Schrödinger 方程，它们的解虽然有很好的光滑性，但不存在极值原理，因此，只能用能量积分进行估计．而这种积分估计不同往常的是必须充分利用它的多种守恒律．正如 Lax 指出的："对于 KdV 方程，具有∞多个守恒律是它的主要特征"．从目前证明这类非线性方程整体解的存在、唯一性来看，有以下几种方法：(1) 先作好积分先验估计，再利用多种近似方法在 $[0, t_1]$ 建立局部解，t_1 依赖于初始函数，再在

$[t_1,t_2]$ 上建立局部解，t_2-t_1 依赖于模 $\|u(t_1)\|$，由于先验估计 $\|u(t)\|\leqslant \text{const}$，因而，由 $t_1, t_2, \cdots$，可延拓到任何有限区间 $[0, T]$ 上去．(2)粘性消去法(或称抛物型正则化方法)，即寻求具粘性近似方程的整体解 u_ε，再利用 u_ε 及其某些导数的模关于小参数 ε 的一致有界性，令 $\varepsilon\to 0$ 即得到我们需要的解．(3)泛函分析的方法，即把原来方程化为微分算子的标准形式，利用微分算子的已知定理，得到整体解的存在定理，这里需要具体验证一下是否满足微分算子方程解的存在的条件．(4) Galerkin 近似解法，即利用 Galerkin 近似解的一致性估计，直接得到大范围的整体解． 在这些证明整体解的存在性的多种方法中，无论哪一种，先验积分估计都是起决定作用的．事实上，并不是所有非线性进化方程都能通过先验估计得到整体解的．例如：某些多维的非线性波动方程和非线性 Schrödinger 方程都存在解的“*blow up*”的现象，即解或解的一阶导数的 L_2 模当 $t\to t_1$ (t_1 为有限时) 它趋于无穷．但若初始条件的 L_2 模适当小时，则又可得到它的整体解．这些问题都引起人们的关注和兴趣．目前对这类非线性方程定解问题大部分限于周期初值问题、初值问题，少部分考虑了它的初值、边值问题．一般来说，对于这类方程的边值问题的提法(例如 KdV 方程)及对它的解的存在性研究，都存在着较多的困难．目前这方面的研究结果甚少．对于初值问题，通常我们都假定它的解当 $|x|\to\infty$ 时趋于零，这个要求是可以的，例如对于 KdV 方程，现已经证明了只要初始条件当 $|x|\to\infty$ 以某种衰减率趋于零，它的解也得到相应的衰减率．当然这个要求并不是必要的，如果用周期边界条件来逼近初值条件，就可以以另外的对初始条件的条件来代替这种假设．我们以下仍对初值问题作这种假定．另外，以下不少定解问题求得的结果，对于周期初值问题或初值问题，都是

同样成立的，我们不准备作更多的说明。

第二节 KdV 方程的周期初值问题和初值问题

KdV 方程解的存在性、唯一性，首先由 Sjöberg 在[1]，[2]中得到，他考虑如下的定解问题

$$\begin{cases} u_t = uu_x + \delta u_{xxx}, & \delta \neq 0 \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in R \\ u(x,t) = u(x+1,t), & \forall x,\ t \end{cases} \tag{2.1}$$

有如下结果：

定理 1 如 $\delta \neq 0$，且设 $f(x)$ 为周期为 1 的函数，它的直到三阶导数属于 L_2，则存在问题(2.1)的唯一解。

利用如下对应于(2.1)的微分差分格式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_N(x,t) = [u_N(x_r,t)D_0 u_N(x_r,t) + D_0 u_N^2(x_r,t)]/3 \\ \qquad + \delta D_+ D_-^2 u_N(x_r,t) \quad (r = 1, 2, \cdots, N) \\ u_N(x_r, 0) = f(x_r) \quad (r = 1, 2, \cdots, N) \\ u_N(x_r, t) = u_N(x_{r+N}, t), \ \forall x, t \end{cases} \tag{2.2}$$

于此 $h = \dfrac{1}{N}$，$x_r = rh$，以 D_+，D_-，D_0 表示差分算子，定义为

$$hD_+ g(x_r) = g(x_{r+1}) - g(x_r)$$
$$hD_- g(x_r) = g(x_r) - g(x_{r-1})$$
$$2hD_0 g(x_r) = g(x_{r+1}) - g(x_{r-1})$$

可证明问题(2.1)局部解的存在性。 再利用(2.1)的三个守恒律

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx = \int_0^1 f^2(x)dx = \alpha_1 = \text{const} \tag{2.3}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{u^3}{3} - \delta u_x^2\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{f^3}{3} - \delta f'^2(x)\right) dx = \alpha_2 = \text{const} \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 (u^4 - 12\delta u u_x^2 + 36\delta^2 u_{xx}/5)dx$$
$$= \int_0^1 (f^4 - 12\delta f f'^2 + 36\delta^2 f''^2/5)dx = \alpha_3 = \text{const} \tag{2.5}$$

作积分先验估计,证明了问题(2.1)整体解的存在性,唯一性易由能量不等式得到. Lax在[3]中首先证明了在区间$(-\infty, +\infty)$上, KdV 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0) \tag{2.6}$$

的 Cauchy 问题

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2.7}$$

解的唯一性，这里的"解"是指 $u(\cdot, t) \in C^\infty(-\infty < x < +\infty)$, u 及其对 x 的一切导数均趋于零 $(|x| \to \infty)$. 设 v 为问题(2.6),(2.7)的其它解:

$$\begin{cases} v_t + vv_x + v_{xxx} = 0 \\ v|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

则令: $w = u - v$, 我们得到 w 的线性方程

$$w_t + uw_x + wv_x + w_{xxx} = 0$$

上式乘以 w, 并对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 作积分,分部积分后得到关系式:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_x - \frac{1}{2}u_x\right)w^2 dx = 0 \tag{2.8}$$

令: $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx$, $\max|2v_x - u_x| = m$. 从(2.8)可

得

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant mE(t)$$

$$\therefore \quad E(t) \leqslant E(0)e^{mt}$$

$E(0) = 0 \Longrightarrow E(t) = 0 \ (t > 0) \Longrightarrow w \equiv 0$

在[4]中对如下的 KdV 方程的周期初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \ (0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 < x < 1) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ u(0, t) = u(1, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \end{cases} \tag{2.9}$$

采用加四阶小参数方法，即考虑相应于问题(2.9)的如下定解问题

$$u_{\varepsilon t} + u_\varepsilon u_{\varepsilon x} + \mu u_{\varepsilon xxx} + \varepsilon u_{\varepsilon xxxx} = 0 \ (\varepsilon > 0),$$

$$(0 < t \leqslant T, \ 0 < x < 1) \tag{2.10}$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial x^j}(0, t) = \frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial x^j}(1, t)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T) \quad (j = 0, 1, 2, 3) \tag{2.12}$$

的解 $u_\varepsilon(x, t)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它趋于(2.9)的解. 其中设 $u_{0\varepsilon} \in C^\infty([0, 1])$，且使得

$$\frac{du_{0\varepsilon}^j(0)}{dx^j} = \frac{du_{0\varepsilon}^j(1)}{dx^j}, \ \forall j \geqslant 0$$

且设 $u_{0\varepsilon}$ 弱收敛于 u_0 依 $H^1(\Omega)(\varepsilon \to 0)$. 这里我们以 Ω 表示区间 $(0, 1)$，$H^s(\Omega)(s \geqslant 0$，且为整数)为 Sobolev 空间

$$\{v \mid v(x) \in L^2(\Omega), \ D^j v(x) \in L^2(\Omega), \ 0 \leqslant j \leqslant s\}$$

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \left\{ \sum_{j=0}^{s} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial x^s} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

由[5]第一章易知问题(2.10)—(2.12)的解 u_ε 存在，且满足：

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \quad (2.13)$$

其中 $L^\infty(0, T; H^s)$ 表示定义在 $[0, T]$ 上取值在 H^s 的函数空间，$u(x,t)$ 作为 x 的函数属于 H^s. 对

$$t \in [0, T], \quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(\cdot, t)\|_s < \infty.$$

$L^2(0, T, H^s)$ 表示函数空间，$u(x, t)$ 作为 x 的函数属于 H^s，

对每个 $t \in [0, T]$，且 $\int_0^T \|u(x, t)\|_s^2 dt < \infty$. 由(2.13)有

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$$

$$u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.14)$$

由方程(2.10)推出：

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mu \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3} + \varepsilon \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} = -u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L^2 \quad (2.15)$$

由此及边界条件，从线性型方程解的光滑性定理推得：

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(Q), \ u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^4(\Omega))$$

$$Q = \Omega \times [0, T] \quad (2.16)$$

我们现在对问题(2.10)，(2.11)，(2.12)的解作先验估计.

引理 1 若 $u_0 \in L^2(\Omega)$，则有

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c \quad (2.17)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \left\|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right\|_{L^2(Q)} \leqslant c \quad (2.18)$$

其中，常数 c 与 ε 无关.

证明 将方程(2.10) 乘以 u_ε 对 x 作积分，在周期条件(2.11)，(2.12)下，有：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^2dx=0$$

由此即得(2.17)和(2.18)。

引理 2 对一切函数 $v(x)\in H^3(\Omega)$，有

$$\|v\|_{L^4(\Omega)}\leqslant c\|v\|_{L^2(\Omega)}^{11/12}\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{d^3v}{dx^3}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{12}} \quad (2.19)$$

$$\left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^4(\Omega)}\leqslant c\|v\|_{L^2(\Omega)}^{7/12}\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{d^3v}{dx^3}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{5}{12}} \quad (2.20)$$

证明 依[6]第一章的插值表示有：

$$[H^3(\Omega),H^0(\Omega)]_{\frac{11}{12}}=H^{\frac{1}{4}}(\Omega),H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$$

且有：$H^{\frac{1}{4}}(\Omega)\subset L^4(\Omega)$，推之

$$\|v\|_{L^4(\Omega)}\leqslant c\|v\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)}\leqslant c\|v\|_{H^3(\Omega)}^{\frac{1}{12}}\|v\|_{H^0(\Omega)}^{\frac{11}{12}}$$

即得(2.19)，类似地，$[H^3(\Omega),\ H^0(\Omega)]_{7/12}=H^{\frac{5}{4}}(\Omega)$

$$\left\|\frac{dV}{dx}\right\|_{L^4(\Omega)}\leqslant c\|v\|_{H^{\frac{5}{4}}(\Omega)}$$

由此推得(2.20)。

引理 3 若 $u_0(x)\in H^1(\Omega)$，则有

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant c \quad (2.21)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right\|_{L^2(Q)}\leqslant c \quad (2.22)$$

这里，常数 c 与 ε 无关。

证明 将方程(2.10)乘以

$$\phi_1(u_\varepsilon)=u_\varepsilon^2+2\alpha\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}$$

对 x 作积分，利用周期边界条件可得：

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left[\frac{1}{3}u_\varepsilon^3-\alpha\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]dx$$
$$+\varepsilon\int_\Omega\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4}\left(u_\varepsilon^2+2\alpha\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}\right)dx=0$$

或

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left[\frac{1}{3}u_\varepsilon^3-\alpha\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]dx$$
$$-2\varepsilon\int_\Omega\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}dx$$
$$-2\alpha\varepsilon\int_\Omega\left(\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right)^2dx=0 \tag{2.23}$$

由此得到

$$\alpha\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\alpha\varepsilon\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$=\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_\varepsilon^3dx-2\varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$$
$$\cdot\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}dx \tag{2.24}$$

将(2.24)对 t 积分之并除以 α 得到

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right\|^2_{L^2}d\sigma$$
$$=\left\|\frac{du_0}{dx}\right\|^2_{L^2}+\frac{1}{3\alpha}\int_\Omega u_\varepsilon^3(x,t)dx$$
$$-\frac{1}{3\alpha}\int_\Omega u_0^3(x)dx-\frac{2\varepsilon}{\alpha}\int_0^t u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}$$
$$\cdot\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}dxd\tau \tag{2.25}$$

因 $\left|\int_\Omega u_\varepsilon^3(t)dt\right|\leqslant\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\leqslant c_1\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{(由于(2.17))}$$

$$\leqslant c_2\|u_\varepsilon(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\left(\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

$$\left(\text{注意到对 } v\in H^1(\Omega)\text{，有 } \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c\|v\|^{1/2}_{L^2}\cdot\left(\|v\|_{L^2}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2}\right)^{1/2}\right)$$

$$\leqslant c_3\left(1+\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right\|_{L^2}\right)^{1/2} \qquad \text{(由于 (2.17))}$$

$$\leqslant c_4 + \frac{3|\alpha|}{2}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right\|^2_{L^2}$$

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}dx\right|$$

$$\leqslant \|u_\varepsilon(t)\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant c_5\|u_\varepsilon(t)\|^{3/2}_{L^2}\left(\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}+\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(t)\right\|_{L^2}\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{(依(2.19),(2.20))}$$

$$\leqslant c_6\left(1+\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(t)\right\|_{L^2}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon(t)}{\partial x^3}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant c_7 + \frac{|\alpha|}{2}\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon(t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{(依 (2.17))}$$

考虑到最后不等式，我们从(2.25)可得：

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon(\sigma)}{\partial x^3}\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma$$

$$\leqslant\left\|\frac{du_0}{dx}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{3|\alpha|}\int_\Omega|u_0|^3dx$$

$$+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon(t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon(\sigma)}{\partial x^3}\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma+c \tag{2.26}$$

由此可得

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(\sigma)\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma\leqslant c$$

由此即得(2.21),(2.22).

利用方程(2.10)

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=-u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}-\varepsilon\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4}$$

再由(2.21),(2.22)有

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\text{ 在 }L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))\text{ 上一致有界} \tag{2.27}$$

由于(2.1),(2.18),(2.21)(2.22),(2.27)能选取子序列 u_ε,使 $u_\varepsilon\to u$, 在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中弱收敛.

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\text{ 在 }L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{ 中弱收敛}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\text{ 在 }L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))\text{ 中弱收敛}$$

从第一、二个结果,推出 $u_\varepsilon\to u$ 在 $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ 中弱收敛. 从第二个结果推出 $u_\varepsilon\to u$ 在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中强收敛. 不难从(2.13),(2.10),(2.11),(2.12)取极限,且

$$u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\to u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.28}$$

在 $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ 中弱收敛. 因此方程 (2.10) $\to u_t+uu_x+\mu u_{xxx}=0$, 即得到我们要求的解. 我们有如下的定理

定理 2 设 $\mu\in R,\mu\neq 0,u_0(x)\in H^1(\Omega),u_0(0)=u_0(1)$,

则存在函数 $u(x, t)$, $u\in L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega))$ 且满足

$$u,\ u_x \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.29}$$

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{2.30}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{2.31}$$

$$u(0, t) = u(1, t) \tag{2.32}$$

定理 3 设 $\mu\in R$, $\mu\neq 0$, $u_0\in H^1(\Omega)$, $\frac{d^ju(0)}{dx^j} = \frac{d^ju(1)}{dx^j}$ $(j=0, 1)$. 则存在定解问题(2.9)的唯一解.

附注 如果 $u_0\in L^{\infty}(\bar{\Omega})$, 且

$$\frac{d^ju_0(0)}{dx^j} = \frac{du_0^j(1)}{dx^j},\ \forall j\geqslant 0$$

则(2.9)的解 $u\in L^{\infty}(\bar{\Omega})$.

在[7]中对初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} - \varepsilon u_{xxt} = 0 \\ \qquad (t>0, -\infty<x<+\infty) \\ u(x, 0) = g(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \end{cases} \tag{2.33}$$

建立它的解 u_ε 的关于 ε 一致的先验估计，从而证明了 KdV 方程初值问题

$$\begin{array}{ll} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 & (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u(x, 0) = g(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{array} \tag{2.34}$$

解的存在性、唯一性. 对于更广泛一类 KdV 方程，复 KdV 方程、以及高阶 KdV 方程组各类定解问题解的存在、唯一性定理参见[8]—[15].

第三节　一类非线性 Schrödinger 方程组的周期初值问题

我们考虑如下一类非线性 Schrödinger 方程组的周期初

值问题.

$$iu_{jt} - u_{jx} + \beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2 + \sigma_{31}|u_2|^2)u_j + k_j(x)u_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ 0 < x < 2\pi, \ t > 0) \tag{3.1}$$

$$u_j|_{t=0} = u_0^j(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \ j = 1,2 \tag{3.2}$$

$$u_j(x, t) = u_j(x + 2\pi, t), \ \forall x, t \geqslant 0, \ j = 1,2 \tag{3.3}$$

其中，$i = \sqrt{-1}$，σ_{21}，σ_{31} 为正常数；$\beta(x)$是有界的周期为2π的实函数. $q(s) \geqslant 0$，$s \in [0, +\infty)$，$k_j(x)(j = 1, 2)$ 为有界的周期为2π的实函数. $u_j(x, t)$ 为复值未知函数. $u_j^0(x)$ $(j = 1, 2)$ 为已知的复值周期为 2π 的函数. 定义内积

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f\bar{g}dx, \quad a(u, v) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}dx.$$

我们先对问题(3.1)—(3.3)的解作先验估计.

引理1 若满足条件: (i) $\beta(x)$，$q(s)$，$k_j(x)$ 为实函数，(ii) $u_0^j(x) \in L_2$，则问题(3.1)—(3.3)的解 $u^j(x, t)$ 有等式

$$\|u^j(t)\|_{L_2}^2 = \|u_0^j\|_{L_2}^2 \quad (j = 1, 2) \tag{3.4}$$

证明: 将(3.1)乘以 $\bar{u}_j$ 并对 x 积分可得

$$i(u_{jt}, u_j) + a(u_j, u_j) + (\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2 + \sigma_{31}|u_2|^2)u_j, u_j) + (k_j(x)u_j, u_j) = 0 \tag{3.5}$$

由于 $a(u_j, u_j) \geqslant 0$，$\beta(x)$ 为实函数，

$$(\beta q u_j, u_j) = \int_0^{2\pi} \beta(x)q|u_j|^2dx,$$

$$(k_j u_j, u_j) = \int_0^{2\pi} k_j(x)|u_j|^2dx,$$

由(3.5)取虚部即得(3.4).

引理2 若满足条件 (i) σ_{21}，σ_{31} 为实数，$\beta(x)$，$k_j(x)$，$q(s)$ 均为实函数；(ii)$u_0^j(x) \in L_2$，$\beta(x)$，$Q(\sigma_{21}|u_0^1|^2+\sigma_{31}|u_0^2|^2) \in L_1$，其中，$Q(s) = \int_0^s q(z)dz$. 则问题(3.1)—(3.3)的解成

立等式:

$$\sigma_{21}\|u_{1x}\|_{L_2}^2+\sigma_{31}\|u_{2x}\|_{L_2}^2+\int_0^{2\pi}\beta(x)Q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)dx$$

$$+\int_0^{2\pi}[k_1(x)\sigma_{21}|u_1|^2+k_2(x)\sigma_{31}|u_2|^2]dx$$

$$=\sigma_{21}\|u_{0x}^1\|_{L_2}^2+\sigma_{31}\|u_{0x}^2\|_{L_2}^2$$

$$+\int_0^{2\pi}\beta(x)Q(\sigma_{21}|u_0^1|^2+\sigma_{31}|u_0^2|^2)dx$$

$$+\int_0^{2\pi}[k_1(x)\sigma_{21}|u_0^1|^2+k_2(x)\sigma_{31}|u_0^2|^2]dx \tag{3.6}$$

证明 我们将(3.1)乘以 $\bar{u}_{jt}$，对 x 作积分得

$$i(u_{jt},u_{jt})+(u_{jx},u_{jxt})+(\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_j,u_{jt})$$
$$+(k_ju_j,u_{jt})=0 \tag{3.7}$$

因

$$\operatorname{Re}(u_{jx},u_{jxt})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{jx}\|_{L_2}^2$$

$$\operatorname{Re}(k_ju_j,u_{jt})=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}k_j(x)|u_j|^2dx,$$

$$\operatorname{Re}(\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_j,\sigma_{21}u_{1t})$$

$$+\operatorname{Re}(\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_2,\sigma_{31}u_{2t})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)dx$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\beta(x)Q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)dx$$

于是由(3.7)取实部,并对 $j=1$，乘以 σ_{21}；对 $j=2$，乘以 σ_{31}，二式相加得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\sigma_{21}\|u_1\|_{L_2}^2+\sigma_{31}\|u_2\|_{L_2}^2)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}\beta(x)Q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)dx$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}[k_1(x)\sigma_{21}|u_1|^2+k_2(x)\sigma_{31}|u_2|^2]dx$$

$$=0$$

即得(3.6).

引理 3 若满足引理 2 的条件,且 $k_j(x)(j=1,2)$ 为有界实函数，$q(s)\geqslant 0$，$\beta(x)\geqslant 0$，且为有界，并且 $\sigma_{21}>0$，$\sigma_{31}>0$，则对问题(3.1)—(3.3)的解有估计:

$$\|u_{1x}\|_{L_2}^2\leqslant c_1,\ \|u_{2x}\|_{L_2}^2\leqslant c_2$$

$$\int_0^{2\pi}\beta(x)Q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)dx\leqslant c_3 \tag{3.8}$$

其中,常数 c_1，c_2 仅依赖于初始函数及其导数。

证明 由(3.6)及引理条件即得.

推论

$$\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|_{L^\infty}\leqslant c_4 \tag{3.9}$$

其中,常数 c_4 仅依赖于初始函数及其导数.

证明 由引理的结论及 Sobolev 不等式即得.

引理 4 若满足引理 3 的条件,且设 $u_0^j(x)\in H^2$ $(j=1,2)$,则问题(3.1)—(3.3)的解有估计:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{1t}\|_{L_2}^2\leqslant c_5,\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{2t}\|_{L_2}^2\leqslant c_6 \tag{3.10}$$

其中,常数 c_5，c_6 依赖于初始函数的直到二阶的导数.

证明 由(3.1)对 t 微商一次,并乘以 $\bar{u}_{jt}$ 作积分得

$$i(u_{jtt},u_{jt})+(u_{jxt},u_{jxt})$$

$$+\left(\beta(x)\frac{d}{dt}u_jq(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2),\ u_{jt}\right)$$

$$+(k_ju_{jt},u_{jt})=0 \tag{3.11}$$

因

$$\left(\beta(x)\frac{d}{dt}u_j q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2),\ u_{jt}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)|u_{jt}|^2dx$$

$$+\int_0^{2\pi}\beta(x)q'\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)$$

$$\cdot u_j\bar{u}_{jt}dx,\quad \frac{\partial}{\partial t}|u_j(t)|^2=u_{jt}\bar{u}_j+u_j\bar{u}_{jt}$$

∴

$$\left|\int_0^{2\pi}\beta q'\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_j\bar{u}_{jt}dx\right|$$

$$\leqslant c_1\|q'(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)\|_{L^\infty}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}dx[|u_{1t}|\cdot|\bar{u}_1|+|u_2|\cdot|u_{1t}|]|u_j||u_{jt}|$$

$$\leqslant c_2[\|u_{1t}\|_{L_2}^2+\|u_{2t}\|_{L_2}^2]$$

于是由(3.11)取虚部可得：

$$\frac{d}{dt}[\|u_{1t}(t)\|_{L_2}^2+\|u_{2t}\|_{L_2}^2]\leqslant c_3[\|u_{1t}(t)\|_{L_2}^2+\|u_{2t}(t)\|_{L_2}^2]$$

由 Gronwall 不等式及引理的条件即得(3.10)。

我们现定义定解问题(3.1)—(3.3)广义解。空间上 2π 周期函数 $u_j(x,t)\in L^\infty(0,T;H^1)$, $u_{jt}\in L^\infty(0,T;L_2)$ $(j=1,2)$，且 $Q(\sigma_{21}|u_0^1|^2+\sigma_{31}|u_0^2|^2)\in L_1$，$\left(\text{于此 } Q(s)=\int_0^s q(z)dz\right)$ 称为定解问题(3.1)—(3.3)的广义解，若满足积分等式：

$$i(u_{jt},v_j)+(u_{jx},v_{jx})+(\beta u^j q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2),v_j)+(k_j u_j,v_j)=0, \tag{3.12}$$

$$\forall v_j(x)\in H^1,\ t\geqslant 0,\ j=1,2$$

$$(u^j|_{t=0},v_j)=(u_0^j(x),v_j)\ (j=1,2) \tag{3.13}$$

由 Galerkin 近似解法或将(3.1)写成积分方程.

$$u^j(x,t)=S(t)u_0^j(x)+\int_0^t S(t-\tau)[q(\sigma_{21}|u_1(x,\tau)|^2$$
$$+\sigma_3|u_2(x,\tau)|^2)u_j+k_j(x)\cdot u_j(x,\tau)]d\tau$$

其中，$s(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi it}}e^{-\frac{x^2}{4\pi i}t}$. 用压缩映照原理，我们易得问题(3.1)—(3.3)局部解的存在性. 由以上先验估计，可得

定理 1 若满足以下条件 (i) $\sigma_{21}\geqslant 0$, $\sigma_{31}\geqslant 0$, 周期为 2π 的实函数 $\beta(x)\geqslant 0$, (ii) $q(s)$ 为实函数，$q(s)\in c^1$, $q(s)\geqslant 0$, $s\in[0,\infty)$; $k_j(x)$为有界的实函数，且为 2π 的周期函数，(iii) $u_0^j(x)$ 为周期复值函数，且 $u_0^j(x)\in H^2$，则定解问题(3.1)—(3.3)的广义解是存在的.

定理 2 若 $q(s)\in c^1$, $s\in[0,+\infty)$, $k_j(x)$ 为有界函数，则定解问题(3.1)—(3.3)的广义解是唯一的.

证明 设有(3.1)—(3.3)的两组广义解 u^j, $z^j(j=1,2)$. 令 $w_j=u_j-z_j$, $j=1,2$. 由(3.12)可得:

$$i(w_{jt},v_j)+(w_{jx},v_{jx})+(\beta(x)u_jq(\sigma_{21}|u_1|^2$$
$$+\sigma_{31}|u_2|^2)-\beta(x)z_jq(\sigma_{21}|z_1|^2$$
$$+\sigma_{31}|z_2|^2),v_j)+(k_j\cdot w_j,v_j)=0,\quad(3.14)$$
$$v_j\in H^1,\ t>0$$
$$w_j|_{t=0}=0\quad(3.15)$$

在(3.14)中特别取 $v_j=w_j$, 且由于

$$q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_j-q(\sigma_{21}|z_1|^2+\sigma_{31}|z_2|^2)z_j$$
$$=q'(\tilde{z})[\sigma_{21}(|u_1|^2-|z_1|^2)+\sigma_{31}(|u_2|^2-|z_2|^2)]u_j$$
$$+q(\sigma_{21}|z_1|^2+\sigma_{31}|z_2|^2)(u_j-z_j)$$

这里，$\tilde{z}$ 在 $|u_1|^2+|u_2|^2$ 和 $|z_1|^2+|z_2|^2$ 之间，

所以

$$|(\beta(x)q(\sigma_{21}|u_1|^2+\sigma_{31}|u_2|^2)u_j-\beta(x)q(\sigma_{21}|z_1|^2$$

$$+\sigma_{31}|z_2|^2)z_j,\ w_j)|$$

$$\leqslant \max|\beta(x)|\Big[(|\sigma_{21}|+|\sigma_{31}|)\|q^1(\tilde{z})\|_{L^\infty}$$

$$\cdot\|u_j\|_{L^\infty}\cdot\sum_{j=1}^{2}(\|u_j\|_{L^\infty}+\|z_j\|_{L^\infty})$$

$$+\|q(\sigma_{21}|z_1|^2+\sigma_{31}|z_2|^2)\|_{L^\infty}\Big]$$

$$\cdot\Big(\sum_{k=1}^{2}|w_k|,|w_j|\Big)$$

由(3.14)取实部，对 j 求和可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2}\|w_j\|_{L_2}^2\leqslant c\sum_{j=1}^{2}\|w_j\|_{L_2}^2$$

由 Gronwall 不等式及 $w_j(0)=0$，即得 $u_j=z_j$。

附注 1 对于非线性 Schrödinger 方程组(3.1)的初值、边值问题，即它的解除了满足(3.1)外，还满足初始条件(3.2)以及

$$u_j|_{x=0}=u_j|_{x=1}=0 \tag{3.16}$$

上述的定理1、定理2的结论仍然成立。

附注 2 如果初始函数和方程系数具有更高的光滑性，则由常用的对方程微商的方法，可得到问题(3.1)—(3.3)的古典整体解。

对于更为广泛的一大类非线性 Schrödinger 方程组，多维非线性 Schrödinger 方程，具有积分型的非线性 Schrödinger 方程组整体解的适定性，可参见[16]—[25]。

第四节 非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题

我们现考虑非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u, & x \in R^3, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in R^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in R^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

其中，m，$\lambda > 0$，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. 我们将用抽象微分算子的泛函方法，证明初值问题(4.1)整体解的存在性。

我们先将问题(4.1)化为对变元 t 的一阶方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \\ u(x, 0) = f(x), \ v(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

或：

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} - \begin{pmatrix} 0, & I \\ \Delta - m^2, & 0 \end{pmatrix} \varphi(t) = J(\varphi(t)) \\ \varphi(x, 0) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.2}$$

其中，$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，$J(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda |u|^2 u \end{pmatrix}$，$I$ 为单位算子.

我们将应用一般 Hilbert 空间的定理来证明问题(4.2)解的存在性、唯一性. 我们先取 Hilbert 空间 $\mathscr{H} = L^2(R^3)$，令 $B^2 = -\Delta + m^2$，易知 B^2 是闭的，我们以 $\mathscr{H}_B$ 表示直接和 $\mathscr{H}_B = D(B) \oplus D(\mathscr{H})$，它具有内积

$$(\langle u, v\rangle, \langle u, v\rangle)_B = (Bu, Bu) + (v, v)$$

令

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{4.3}$$

则容易验证 A 在 $\mathscr{H}_B$ 上是对称算子，且有定义域 $D = D(B^2) \oplus D(B)$. A 也是闭的. 我们可进一步将(4.2)写成算子方程形式:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = -iA\varphi + J(\varphi) \\ \varphi(0) = \varphi_0 = \langle f(x), g(x) \rangle \end{cases} \tag{4.4}$$

现在我们先对(4.1)的解进行估计.

引理 1 设 $u \in c_0^\infty(R^3)$, 则

$$\|u\|_6 \leqslant k\|Bu\|_2 \tag{4.5}$$

证明 记 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 为 u_{xi}, 则有

$$|u(x)|^4 \leqslant 4\int |u_{x_i} u^3| dx_i$$

于此对 x_i 积分,对固定的 $i \neq i$, 有

$$|u(x)|^6 \leqslant K\left(\int |u_{x_1} u^3| dx_1\right)^{1/2} \left(\int |u_{x_2} u^3| dx_2\right)^{1/2} \cdot \left(\int |u_{x_3} u^3| dx_3\right)^{1/2}$$

不等式两边积分,并应用 Schwartz 不等式,得

$$\begin{aligned} \int_{R^3} |u|^6 dx &\leqslant K\left(\int_{R^3} |u_{x_1} u^3| dx\right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left(\int_{R^3} |u_{x_2} u^3| dx\right)^{1/2} \left(\int_{R^3} |u_{x_3} u^3| dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant K\left(\int_{R^3} |u|^6 dx\right)^{3/4} \left(\int_{R^3} |u_{x_1}|^2 dx\right)^{1/4} \\ &\quad \cdot \left(\int_{R^3} |u_{x_2}|^2 dx\right)^{1/4} \left(\int_{R^3} |u_{x_3}|^2 dx\right)^{1/4} \end{aligned}$$

由此易得

$$\left(\int_{R^3}|u|^6dx\right)^{1/6}\leqslant K(\|u_{x_1}\|_2+\|u_{x_2}\|_2+\|u_{x_3}\|_2)$$
$$=K(\|k_1\hat{u}\|_2+\|k_2\hat{u}\|_2+\|k_3\hat{u}\|_2)$$
$$\leqslant K\|(\Sigma k_i^2+m^2)^{1/2}\hat{u}\|_2=K\|Bu\|_2$$

其中

$$\hat{u}(t,k)=\frac{1}{2\pi^{3/2}}\int_{R^3}e^{-ix\cdot k}u(x,t)dx$$

$$\left(x\cdot k=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot k_i\right)$$

引理 2 设 $u_1,u_2,u_3\in D(B)$，则

$$\|u_1u_2u_3\|_2\leqslant K\|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2\|Bu_3\|_2 \tag{4.6}$$

证明 令 $u\in D(B)$，因 B 在 $c_0^\infty(R^3)$ 为本质自共轭，我们能选取函数序列 $u_n\in c_0^\infty(R^3)$，使得 $u_n\xrightarrow{L_2}u$，$Bu_n\xrightarrow{L_2}Bu$，选取子序列，仍记为 u_n，则 u_n 点态收敛于 u，因

$$\begin{aligned}\|u_n^3-u_m^3\|_2&=\|(u_n-u_m)(u_n^2+u_nu_m+u_m^2)\|_2\\&\leqslant K\|u_n-u_m\|_6\|(u_n^2+u_nu_m+u_m^2)\|_3\\&\leqslant K\|u_n-u_m\|_6(\|u_n\|_6^2+\|u_n\|_6\cdot\|u_m\|_6\\&\quad+\|u_m\|_6^2)\leqslant K\|Bu_n-Bu_m\|_2(\|Bu_m\|_2^2\\&\quad+\|Bu_n\|_2\|Bu_m\|_2+\|Bu_m\|_2^2)\end{aligned}$$

因此 $\{u_n^3\}$ 为 L_2 中的 Cauchy 序列，且因它点态收敛于 u^3，因此，$u^3\in L_2$，上面不等式取极限有

$$\|u\|_6^3=\|u^3\|_2\leqslant K\|Bu\|_2^3$$

引理的命题由应用两次 Hölder 不等式即得。

引理 3 对一切 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{H}$，$J$ 满足

$$\|J(\varphi_1)\|\leqslant K\|\varphi_1\|^3,$$
$$\|J(\varphi_1)-J(\varphi_2)\|\leqslant C(\|\varphi_1\|,\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

证明 令 $\varphi_i=\langle u_i,v_i\rangle$，则由引理 2，

$$\|J(\varphi_1)\| = \|\lambda u_1^2\bar{u}_1\|_2 \leqslant K\|Bu_1\|_2^3 \leqslant K\|\varphi_1\|^3$$

$$\begin{aligned}\|J(\phi_1) - J(\varphi_2)\| &= \|\lambda(u_1^2\bar{u}_1 - u_2^2\bar{u}_2)\|_2 \\ &\leqslant K\|B(u_1 - u_2)\|_2(\|Bu_1\|_2^2 + \|Bu_1\|_2\|Bu_2\|_2 + \|Bu_2\|_2^2) \\ &\leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_1\|\|\varphi_2\| + \|\varphi_2\|^2)\end{aligned}$$

即得引理.

引理 4 设 $\varphi_1, \varphi_2 \in D(A)$，则

$$\|AJ(\varphi_1)\| \leqslant K\|\varphi_1\|^2\|A\varphi_1\|,$$

$$\begin{aligned}&\|A(J(\varphi_1) - J(\varphi_2))\| \\ &\quad \leqslant C(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|, \|A\varphi_1\|, \|A\varphi_2\|)(\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|)\end{aligned}$$

证明 令 $\varphi_i = \langle u_i, v_i\rangle$，于此 $u_i \in D(B^2)$，$v_i \in D(B)$，我们计算

$$\begin{aligned}\|Bu_{x_i}\|^2 &= \|(\Sigma k_i^2 + m^2)^{1/2}k_i\hat{u}\|_2^2 \leqslant \|(\Sigma k_i^2 + m^2)\hat{u}\|_2^2 \\ &= \|B^2u\|_2^2\end{aligned}$$

因此，由引理 2 有

$$\begin{aligned}\|(u^2\bar{u})_{x_i}\|_2 &= \|2uu_{x_i}\bar{u} + u^2\bar{u}_{x_i}\|_2 \leqslant K\|Bu\|_2^2 \cdot \|Bu_{x_i}\|_2 \\ &\leqslant K\|Bu\|_2^2\|B^2u\|_2\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|AJ(\varphi_1)\|^2 &= \lambda^2\|Bu_1^2\bar{u}_1\|_2^2 \\ &= \lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1)_{x_i}\|_2^2 + \lambda^2m^2\|u_1^2\bar{u}_1\|_2^2 \\ &\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2 + m^2\|Bu_1\|_2^6) \\ &\leqslant K\|Bu_1\|_2^4\|B^2u_1\|_2^2 \leqslant K\|\varphi_1\|^4\|A\varphi_1\|^2\end{aligned}$$

我们已证了第一个等式. 为证第二个等式，由引理 2 和上式有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\|(u^2\bar{u}_1 - u_1^2\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2 \\ &\quad \leqslant \|u_1^2(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2 + \|(u_1^2 - u_2^2)(\bar{u}_2)_{x_i}\|_2^2 \\ &\qquad + \|2(u_1)_{x_i}(|u_1|^2 - |u_2|^2)\|_2^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \|2(u_1-u_2)_{x_i}|u_2|^2\|_2^2 \\
&\leqslant K(\|Bu_1\|_2^4\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2 + \|B^2u_2\|_2^2\|B(u_1 \\
&\quad + u_2)\|_2^2\|B^2(u_1-u_2)\|_2^2) \\
&\leqslant K(\|\varphi_1\|^4\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2 + \|A\varphi_2\|^2(\|\varphi_1\| \\
&\quad + \|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2)
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\|A(J(\varphi_1)-J(\varphi_2))\|^2 = \lambda^2\|B(u_1^2\bar{u}_1 - u_2^2\bar{u}_2)\|_2^2 \\
&= \lambda^2\sum_{i=1}^{3}\|(u_1^2\bar{u}_1 - \bar{u}_2u_2^2)_{x_i}\|_2^2 + m^2\lambda^2\|u_1^2\bar{u}_1 - u_2^2\bar{u}_2\|_2^2 \\
&\leqslant C(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|, \|A\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2 \\
&\quad + C(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|)\|A(\varphi_1-\varphi_2)\|^2
\end{aligned}
$$

其中，我们多次用到了不等式 $\|Bu\|_2 \leqslant K\|B^2u\|_2$，引理得证。

引理 5 设 $u(x, t)$ 为 (4.1) 在 $[0, T]$ 上的解，其中 $u(x, 0) = f(x) \in D(B^2)$，$u_t(x, 0) = g(x) \in D(B)$，则有

$$
E(t) = \frac{1}{2}\int\left[|Bu(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2 + \frac{\lambda}{2}|u(x, t)|^4\right]d^3x
$$

与 t 无关。

证明 令 $\varphi(t) = \langle u(x, t), u_t(x, t)\rangle$。因对每个 $t \in [0, T]$，$\varphi(t) \in D(A)$，我们有 $u(\cdot, t) \in D(B^2)$，$u_t(\cdot, t) \in D(B)$ $\forall t \in [0, T]$。因 $\varphi(t)$ 为强可微，u，u_t 作为 $L^2(R^3)$ 上的函数值为强可微。且

$$
\begin{cases}
\left\|B\left(\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} - u_t(t)\right)\right\|_2 \to 0, \ h \to 0 \\
\left\|\dfrac{u_t(t+h)-u_t(t)}{h} - u_{tt}(t)\right\|_2 \to 0, \ h \to 0
\end{cases} \tag{4.7}
$$

从此推出 $E(t)$ 的前二项是可微的。为了证明它的第三项也

是可微的，我们从引理 1 和 Hölder 不等式推出

$$\left\|u\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u_t(t)\right)\right\|_2$$

$$\leqslant \|u\|_2^{1/2}\|Bu\|_2^{1/2}\left\|B\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right.\right.$$

$$\left.\left.-u_t(t)\right)\right\|_2$$

由此和(4.7)推出 $u^2(x,t)$ 为强可微，因此

$$\int |u(t,x)|^4 dx=(u^2(t),u^2(t))_2$$

是可微的，于是 $E(t)$ 是可微的，且

$$E'(t)=\frac{1}{2}(Bu_t,Bu)+\frac{1}{2}(u_{tt},u_t)$$

$$+\frac{\lambda}{2}(uu_t,u^2)+\frac{1}{2}(Bu,Bu_t)$$

$$+\frac{1}{2}(u_t,u_{tt})+\frac{\lambda}{2}(u^2,uu_t)$$

$$=\frac{1}{2}(u_t,B^2u+u_{tt}+\lambda|u|^2u)$$

$$+\frac{1}{2}(B^2u+u_{tt}+\lambda|u|^2u,u_t)=0$$

其中，我们用到了 u 满足的微分方程.

有了以上对问题(4.1)解的基本估计，再应用如下的抽象微分算子的解的存在定理，我们就可以得到 (4.1) 的解存在性、唯一性和光滑性.

我们现考虑算子方程(4.4)，设 A 为在某 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的自共轭算子. 设 J 为从 $D(A)$ 到 $\mathscr{H}$ 的非线性映照.我们的问题是寻找 J 应满足怎样的条件，以保证对任何 $\varphi_0\in$

$D(A)$ 存在唯一的在 $\mathscr{H}$ 上取值函数 $\varphi(t), t\in[0,\infty)$，满足

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=-iA\varphi+J(\varphi)\\ \varphi(0)=\varphi_0\end{cases}\tag{4.8}$$

我们有以下定理.

定理 1（局部存在性） 设 A 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的自共轭算子，且 J 为 $D(A)\to D(A)$ 的映照，满足:

(H_0) $\|J(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|$

(H_1) $\|AJ(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|,\|A\varphi\|)\|A\varphi\|$

(H_0^2) $\|J(\varphi)-J(\psi)\|\leqslant C(\|\varphi\|,\|\psi\|)\|\varphi-\psi\|$

(H_1^2) $\|A(J(\varphi)-J(\psi))\|\leqslant C(\|\varphi\|,\|A\varphi\|,\|\psi\|,$
$\|A\psi\|)\|A\varphi-A\psi\|,\ \forall\varphi\cdot\psi\in D(A)$

其中，每个常数 C 为所指模的单增函数，则对一切 $\varphi_0\in D(A)$，存在 $T>0$，使得(4.8)在 $[0,T)$ 上具有唯一连续可微解，且对一切 $\varphi_0\in\{\varphi\,|\,\|\varphi\|\leqslant a,\ \|A\varphi\|\leqslant b\}$，$T$ 能选取得一致成立.

定理 2（局部光滑性）

(a) 设 A 在 Hilbert $\mathscr{H}$ 上为自共轭算子，且 J 为

$$D(A^j)\to D(A^j),\ (1\leqslant j\leqslant n)$$

的映照且满足(对 $j=0,1,\cdots,n$):

(H_j) $\|A^jJ(\varphi)\|\leqslant C(\|\varphi\|,\cdots\|A^j\varphi\|)\|A^j\varphi\|$

(H_j^2) $\|A^j(J(\varphi)-J(\psi))\|\leqslant C(\|\varphi\|,\|\psi\|,\cdots,$
$\|A^j\varphi\|,\|A^j\psi\|)\cdot\|A^j\varphi-A^j\psi\|,$
$\forall\varphi,\psi\in D(A^j)$

其中，每个常数 C 为它的变量的单增函数，则对一切 $\varphi_0\in D(A^n)$，$n\geqslant 1$，存在 $T_n>0$，使得(4.8)在 $t\in[0,T_n)$ 上，具有唯一解 $\varphi(t)\in D(A^n)$，$t\in[0,T_n)$. 如 $\varphi_0\in$ 集合

$$\{\varphi \mid \|A^j\varphi\| \leqslant a_j,\ j = 0, 1, \cdots, n\}$$

则能选取 T 一致成立.

(b) 如果比 (a) 增加假设,对 $j < n$, J 具有如下性质:若 φ 为 j 次强连续可微, $\varphi^{(k)}(t) \in D(A^{n-k})$, $A^{n-k}\varphi^{(k)}(t)$ 为连续的(对一切 $k \leqslant j$), 则 $J(\varphi(t))$ 为 j 次可微.

$$\frac{d^j J(\varphi(t))}{dt^j} \in D(A^{n-j-1}),\quad A^{n-j-1}d^j J(\varphi(t))/dt^j$$

为连续的,则由(a)得到的解对 t 为 n 次强可微,且

$$\frac{d^j\varphi(t)}{dt^j} \in D(A^{n-j})$$

定理 3(整体存在性和光滑性) 设 A 在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上为自共轭算子,且 n 为正整数, J 为 $D(A^j) \to D(A^j)$ 的映照 $(1 \leqslant j \leqslant n)$, 且满足(对 $0 \leqslant j \leqslant n$).

(H_0) $\|J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|)\|\varphi\|$

(H_j') $\|A^j J(\varphi)\| \leqslant C(\|\varphi\|, \cdots, \|A^{j-1}\varphi\|)\|A^j\varphi\|,$

$j = 1, 2, \cdots, n$

(H_j'') $\|A^j(J(\varphi) - J(\psi))\| \leqslant C(\|\varphi\|, \cdots, \|A^{j-1}\varphi\|$ $\|A^{j-1}\psi\|)\|A^j\varphi - A^j\psi\|$, $\forall \varphi, \psi \in D(A^j)$,

$j = 1, 2, \cdots, n$

其中, C 为它的一切变量的单增函数. 设 $\varphi_0 \in D(A^n)$, 且在由定理 2(a) 保证解存在的任何有限区间上, $\|\varphi(t)\|$ 是有界的,则存在在 $D(A^n)$ 上强可微函数 $\varphi(t)$, 在$[0, \infty)$上满足

$$\begin{cases}\varphi'(t) = -iA\varphi(t) + J(\varphi(t))\\ \varphi(0) = \varphi_0\end{cases} \tag{4.9}$$

进一步,如 J 满足定理 2 的 (b) 部分假设,则 $\varphi(t)$为 n 次强可微,且 $\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j} \in D(A^{n-j})$.

利用引理1—引理 6 的先验估计和定理 1—定理 3, 我们可以得到问题(4.1)解的存在定理.

定理 4 设 $\lambda > 0$, $m > 0$, 且

$$f \in D(-\Delta + m^2),\ g \in D((-\Delta + m^2)^{1/2})$$

则存在唯一的函数 $u(x, t)$, $t \in R$, $x \in R^3$. 使得 $t \to u(\cdot, t)$ 为在 $L_2(R^3)$ 上的 t 的二次强可微函数,对一切 t, $u(\cdot, t) \in D(-\Delta + m^2)$, $u(x, 0) = f(x)$

$u_t(x, 0) = g(x)$, 且满足

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u \tag{4.10}$$

对一切 t, 映照 $\langle f, g\rangle \longmapsto \langle u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)\rangle$ 是连续的.

证明 由引理 3 和引理 4, 可知 J 满足定理 1 的条件 (H_0^2),(H_1^2)以及 $(H_0)(H_1')$. 因此,唯一局部解 $\varphi(t)$在 $[0, T)$ 上存在,由引理5, $E(t)$ 对一切 $t \in [0, T)$ 是常数,因

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \frac{\lambda}{4}\int_{R^3} |u(xt)|^4 dx^3 = E(t) = E(0)$$

因此, $\|\varphi(t)\|$ 在 $[0, T)$ 上有界,由定理 3 解存在, 对一切 $t \geqslant 0$. 定理证毕.

对于其它一些非线性进化方程及其方程组, 应用抽象微分算子的方法证明它们的存在性、唯一性可参考[18],[26]—[29].

第五节 RLW 方程和 Galerkin 方法

我们用 Galerkin 方法来证明 RLW 方程解的存在性,并讨论解的光滑性.

考虑如下的一般的 RLW 方程的初值、边值问题.

$$u_t + f(u)_x - u_{xxt} = g(x, t) \tag{5.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{5.2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \tag{5.3}$$

在以下证明问题(5.1)—(5.3)解的存在性中需要如下 Sobolev 空间的二个引理。

引理 1 如 $u \in H^1(0, 1)$，则存在常数 $C > 0$，它不依赖于 u，使得，

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)| \leqslant C\|u\|^{1/2}(\|u\| + \|u_x\|)^{1/2} \tag{5.4}$$

引理 2 设 $f \in C^k(R)$，$k \geqslant 1$，且 $f(0) = 0$，如 $u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^k(0, 1))$，则 $f(u(x, t)) \in L^\infty(0, T; H^k(0, 1))$，且有不等式：

$$\|f(u(t))\|_{H^1(0,1)} \leqslant M\|u(t)\|_{H^1(0,1)}$$

和

$$\|f(u(t))\|_{H^k(0,1)} \leqslant C_k(1 + \|u(t)\|^{k-1}_{H^{k-1}}) \cdot \|u(t)\|_{H^k} \quad (k \geqslant 2) \tag{5.5}$$

于此 M 和 C_k 为常数。

我们记 $(0, 1) = \Omega$，$Q = \Omega \times [0, T]$，$T > 0$

我们有如下定理。

定理 1 设 $T > 0$ 为一实数，

$g(x, t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$，$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$，

且 $f(s) \in C^1(R)$，则存在唯一函数 $u(x, t)$，$(x, t) \in Q$，它满足条件

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{5.6}$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{5.7}$$

$$u_t + (f(u))_x - u_{xxt} = g(x, t)，\text{在 } Q \text{ 上} \tag{5.8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{5.9}$$

附注 无损于一般性，我们恒设 $f(0) = 0$，事实上，若 $f(0) \neq 0$，则有方程

$$u_t + (h(u))_x - u_{xxt} = g(x, t)$$

于此，$h(s)=f(s)-f(0)$，它等价于方程(5.8)。

证明 首先我们看到(5.9)具有意义．事实上，由(5.6)，(5.7)及第六章的引理1可知 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 能确定．本定理应用 Galerkin 方法分三步证明：(i) 构造方程(5.8)的近似解；(ii) 对近似解作先验估计；(iii) 对近似解取极限．

第一步，构造近似解，设 $\{w_v\}$ 为空间 $H_0^1(\Omega)$ 的基函数，对任何 $m\in N$，$w_1, w_2, \cdots, w_m$ 为线性无关的，作(5.8)的近似解，$u^m=u^m(x,t)=\sum_{v=1}^{m} g_{vm}(t)w_v(x)$，其中，系数 $g_{vm}(t)$ 为方程

$$(u_t^m, w_v)+a(u_t^m, w_v)+((f(u^m))_x, w_v)=(g, w_v),\quad v=1,2,\cdots,m \tag{5.10}$$

所定．这里 $a(u,v)=\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}dx$．因 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，则存在常数 $C_{vm}(v=1,2,\cdots,m)$，使得当 $u_{0m}=\sum_{v=1}^{m} C_{vm}w_v$，有

$$u_{0m}\xrightarrow{\text{强}}u_0,\ \text{在 } H_0^1(\Omega)\text{ 中}，m\to\infty \tag{5.11}$$

如果我们附加方程(5.10)以初始条件，$u^m(0)=u_{0m}$ 则我们得到未知函数 g_{vm} 的常微分方程组，具有初始条件，$g_{vm}(0)=C_{vm}$．这方程组由于基函数 $\{w_v\}_{v\in N}$ 是线性无关的，因而 g_{vm} 的系数矩阵是可逆的，它的局部解是存在的．因此，在 $[0,t_m)$ 上，存在方程组(5.10)的解 $\{g_{vm}(t)\}_{1\le v\le m}$．在下一步由于建立了先验估计，可知它的解可从 $[0,t_m)$ 延拓到 $[0,T]$，T 为任意有限正数．

第二步，作先验估计，乘近似解满足的方程(5.10)两边以 $g_{vm}(t)$，并对 v 从1到 m 求和，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u^m\|^2 + a(u^m, u^m))$$

$$-\left(f(u^m), \frac{\partial u^m}{\partial x}\right) = (g, u^m) \qquad (5.12)$$

如令

$$h(x, t) = \int_0^{u^m(x,t)} f(s)ds$$

则

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f(u^m)\frac{\partial u^m}{\partial x}$$

因 $w_\nu \in H_0^1(\Omega)$, $h(0, t) = h(1, t) = 0$, 我们有

$$\left(f(u^m), \frac{\partial u^m}{\partial x}\right) = h(1, t) - h(0, t), \quad \forall t$$

则由(5.12)有:

$$\frac{d}{dt}(\|u^m\|^2 + a(u^m, u^m)) \leqslant \|g(t)\|^2 + \|u^m\|^2$$

由 Gronwall 引理和 $u_{0m} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u_0$, 我们得到

$$\|u^m\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c, \quad \forall t \in [0, T] \qquad (5.13)$$

其中,常数 c 与 m 无关. 由此可知, 当 $m \to \infty$ 时, u^m 属于 $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ 的有界集,因此, $u^m \xrightarrow{\text{弱}*} u$, 在 $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ 中.

我们再来作 u_t^m 的估计, 将(5.10)两边乘以 $g'_{\nu m}(t)$, 并对 ν 从 1 到 m 求和,我们得到

$$\|u_t^m\|^2 + a(u_t^m, u_t^m) \leqslant |(f(u^m)_x, u_t^m)| + |(g, u_t^m)|$$

$$\leqslant \|f(u^m)_x\|\|u_t^m\| + \|g(t)\|\|u_t^m\|$$

由引理 2 和估计(5.13)可得

$$\|u_t^m\|_{H_0^1(0,1)} \leqslant c, \quad t \in [0, T) \qquad (5.14)$$

其中,常数 c 与 m 无关. 因此, u_t^m 属于 $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ 的

因此，从(5.23)，令 $m \to \infty$，我们得到

$$(u_t, w_\nu) + a(u_t, w_\nu) + (f(u)_x, w_\nu) = (g, w_\nu),$$

对一切 ν 成立. (5.25)

由于 $\{w_\nu\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，因此有

$$(u_t, v) + a(u_t, v) + (f(u)_x, v) = (g, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

且 u 满足定理 1 的条件 (i)—(iii).

现让我们验证 u 满足初始条件. 事实上，因为在 $L^\infty(0, T; L_2(\Omega))$中 $u^m \xrightarrow{\text{弱*}} u$，因此，

$$\int_0^T (u^m, v)dt \to \int_0^T (u, v)dt, \ \forall v \in L^1(0, T; L_2(\Omega)) \tag{5.26}$$

由(5.15)有:

$$\int_0^T (u_t^m, v)dt \to \int_0^T (u_t, v)dt, \forall v \in L^1(0, T; L_2(\Omega)) \tag{5.27}$$

现考虑 $v(x, t) = \theta(t)w(x)$, $w(x) \in L_2(\Omega)$, $\theta \in C^1(0, T)$ 使得 $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$, 如我们取 $v = \theta' w$ 于(5.26)和 $v = \theta w$ 于(5.27)中，可得到

$$\lim_{m \to \infty} (u^m(0), w) = (u(0), w). \ \forall w \in L_2(\Omega).$$

即 $u^m(0) \xrightarrow{\text{弱}} u(0)$ 在 $L_2(\Omega)$ 中，因此 $u(0) = u_0$.

为了证明解的唯一性，设有对应于同一初始条件的二个解 u, v. 如令 $w = u - v$. 则有

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} + f(u)_x - f(v)_x = 0 \\ w(x, 0) = 0, \ w(0, t) = w(1, t) = 0 \end{cases}$$

于是 w 满足方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\right)(\|w\|^2 + \|w_x\|^2) = (f(u) - f(v), w_x) \tag{5.28}$$

由引理 1、引理 2 和(5.28)得到

因此，从(5.23)，令 $m\to\infty$，我们得到

$$(u_t, w_\nu)+a(u_t, w_\nu)+(f(u)_x, w_\nu)=(g, w_\nu),$$

对一切 ν 成立. (5.25)

由于 $\{w_\nu\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，因此有

$$(u_t, v)+a(u_t, v)+(f(u)_x, v)=(g, v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

且 u 满足定理 1 的条件 (i)—(iii).

现让我们验证 u 满足初始条件. 事实上，因为在 $L^\infty(0, T; L_2(\Omega))$中 $u^m\xrightarrow{\text{弱}*}u$，因此，

$$\int_0^T(u^m, v)dt\to\int_0^T(u, v)dt,\ \forall v\in L^1(0, T; L_2(\Omega)) \tag{5.26}$$

由(5.15)有:

$$\int_0^T(u_t^m, v)dt\to\int_0^T(u_t,v)dt,\forall v\in L^1(0,T;L_2(\Omega)) \tag{5.27}$$

现考虑 $v(x, t)=\theta(t)w(x)$, $w(x)\in L_2(\Omega)$, $\theta\in C^1(0, T)$ 使得 $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$, 如我们取 $v=\theta' w$ 于(5.26)和 $v=\theta w$ 于(5.27)中，可得到

$$\lim_{m\to\infty}(u^m(0), w)=(u(0), w).\ \ \forall w\in L_2(\Omega).$$

即 $u^m(0)\xrightarrow{\text{弱}}u(0)$ 在 $L_2(\Omega)$ 中，因此 $u(0)=u_0$.

为了证明解的唯一性，设有对应于同一初始条件的二个解 u, v. 如令 $w=u-v$. 则有

$$\begin{cases}w_t-w_{xxt}+f(u)_x-f(v)_x=0\\ w(x, 0)=0,\ w(0, t)=w(1, t)=0\end{cases}$$

于是 w 满足方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\right)(\|w\|^2+\|w_x\|^2)=(f(u)-f(v), w_x) \tag{5.28}$$

由引理 1、引理 2 和(5.28)得到

$$\frac{d}{dt}(\|w\|^2 + \|w_x\|^2) \leqslant C\|w_x\|^2$$

其中，$c > 0$，与 t 无关．因此 $w \equiv 0$．

下面我们讨论弱解的正则性．我们选取 Galerkin 方法的基函数为一维 Laplace 算子的特征函数，则可得到解的更高的光滑性．设 $\{\phi_\nu\}_{\nu\in N}$ 为一维 Laplace 算子在 $L_2(\Omega)$ 中的特征函数，由[6]可知，$\{\phi_\nu\}$ 在 $L_2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 中为完备正交系．我们知道 $\phi_\nu \in H^k(\Omega)$，k 为任何正整数，以 V^k 表示在 $H^k(\Omega)$ 中，ϕ_ν 的有限线性组合的闭包．

定理 2 设 $g(x, t) \in L^\infty(0, T; H^k(\Omega))$，使得

$$D^{2\nu} g \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \nu = 0, 1, 2, \cdots, j$$

且 $k - 2j \geqslant 1$；$f(s) = \frac{s^2}{2}$，$u_0 \in V^{k+1}$，则对每一个非负整数 k，仅存在一函数 $u(x, t)$，它定义在 Q 上，且满足条件

$$u \in L^\infty(0, T; H^{k+1}(\Omega)) \tag{5.29}$$

$$D^{2\nu} u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \nu = 0, 1, 2, \cdots, j,$$
$$k + 1 - 2j \geqslant 1 \tag{5.30}$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^{k+2}(\Omega)), \tag{5.31}$$

$$D^{2\nu} u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \nu = 0, 1, 2, \cdots, j,$$
$$k + 2 - 2j \geqslant 1 \tag{5.32}$$

$$u_t + uu_x - u_{xxt} = g, \text{ 在 } L^\infty(0,T;L_2(\Omega)) \text{ 中} \tag{5.33}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{5.34}$$

证明 设 $u^m(x,t)$ 为定理 1 所定义的近似解，我们考虑特征函数 ϕ_ν 代替 w_ν，我们有

$$(u_t^m, \phi_\nu) + (f(u^m)_x, \phi_\nu) - (u_{xxt}^m, \phi_\nu)$$
$$= (g, \phi_\nu), \nu = 1, \cdots, m \tag{5.35}$$

$$u^m(0) = u_{0m} \tag{5.36}$$

其中，$u_{0m} \xrightarrow{\text{强}} u_0$，在 $H^{k+1}(\Omega)$ 中．我们注意到

$$\Delta^p \phi_\nu = (-\lambda_\nu)^p \phi_\nu$$

对一切 p，于此 p 为非负整数.

我们将用归纳法证明(在定理的假设下)

$$\|u^m(t)\|_{H^{k+1}} \leqslant C, \ \forall t \in [0, T] \qquad (5.37)$$

$$\|u_t^m(t)\|_{H^{k+1}} \leqslant C, \ \forall t \in [0, T] \qquad (5.38)$$

其中,常数 $C > 0$, 与 m, t 无关.

首先,如同定理 1 的证明，我们取基函数为一维 Laplace 算子的特征函数. 由定理1的假设(5.13),(5.14)有估计:

$$\|u_{xxt}^m(t)\| \leqslant C \qquad (5.39)$$

其中,常数 $C > 0$ 与 m, t 无关. 事实上,(5.10)两边乘以 $(-\lambda_\nu)g'_{\nu m}$，并对 ν 求和得

$$\|u_{xt}^m\|^2 + \|u_{xxt}^m\|^2 = -(g, u_{xxt}^m) + (f(u^m)_x, u_{xxt}^m)$$

$$\leqslant \|g\|\|u_{xxt}^m\| + \|f(u^m)_x\|\|u_{xxt}^m\|$$

由引理 2 和(5.13)，即得 (5.39). 因此，对 $k = 0$, (5.37), (5.38) 成立.

附注 代替任意基 $\{w_\nu\}$，考虑特殊基 $\{\phi_\nu\}$,利用定理 1 的假设,我们能分别代替(5.7),(5.8)以更好的结果

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

$u_t + (f(u))_x - u_{xxt} = g(x, t)$, 在 $L^\infty(0, T; L_2(\Omega))$ 弱 * 意义下.

设(5.37),(5.38)对 $k \geqslant 0$ 成立. 我们证明它们对 $k+1$ 也成立. 注意到当 q 为奇正整数时有

$$D^q f(u^m) = c_0 u^m D^q u^m + c_1 D u^m D^{q-1} u^m + \cdots$$

$$+ C_{\frac{q-1}{2}} \cdot D^{\frac{q-1}{2}} u^m$$

因此

$$(Df(u^m), D^{2k+2}u^m) = \pm (D^{k+1} f(u^m), D^{k+2} u^m) \quad (5.40)$$

$$(Df(u^m), D^{2k+4}u^m) = \pm (D^{k+2} f(u^m), D^{k+3} u^m) \quad (5.41)$$

(5.35) 两边乘以 $(-\lambda_\nu)^{k+1}g_{\nu m}$，并对 ν 求和，我们有

$$(u_t^m, D^{2k+2}u^m) + (f(u^m)_x, D^{2k+2}u^m) - (D^2u_t^m, D^{2k+2}u^m) = (g, D^{2k+2}u^m)$$

由(5.40)有

$$(D^{k+1}u_t^m, D^{k+1}u^m) + (D^{k+2}u_t^m, D^{k+2}u^m) = -(D^k g, D^{k+2}u^m) \pm (D^{k+1}f(u^m), D^{k+2}u^m)$$

或

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\right)(\|D^{k+1}u^m\|^2 + \|D^{k+2}u^m\|^2) \leqslant \frac{1}{2}\|D^k g\|^2 + \frac{1}{2}\|D^{k+1}f(u^m)\| + \|D^{k+2}u^m\|^2$$

由归纳法假设及引理 2，有

$$\|D^{k+2}u^m(t)\| \leqslant C, \ \forall t \in [0, T] \tag{5.42}$$

其中，常数 $C > 0$，与 m，t 无关．类似，将两边乘以

$$(-\lambda_\nu)^{k+2} \cdot g'_{\nu m}$$

并对 ν 求和，有

$$\begin{aligned}\|D^{k+2}u_t^m\|^2 + \|D^{k+3}u_t^m\| &= -(D^{k+1}g, D^{k+3}u_t^m) \pm (D^{k+2}f(u^m), D^{k+3}u_t^m) \\ &\leqslant 2\|D^{k+1}g\|^2 + 2\|D^{k+2}f(u^m)\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\|D^{k+3}u_t^m\|^2\end{aligned}$$

由归纳法假设，引理 2 和(5.42)有

$$\|D^{k+2}u_t^m(t)\| \leqslant C, \ \forall t \in [0, T] \tag{5.43}$$

其中，常数 $C > 0$ 与 m，t 无关．由(5.42)，(5.43)即得(5.37)，(5.38)．

附注 定理 2 对于 $f(s) = Cs^n$ 也是成立的．其中 C 为常数．n 为偶正整数．

至于其它非线性进化方程应用 Galerkin 法和粘性消去法

进行研究见[30]—[35].

第六节 $t\to\infty$ 时解的渐近性和"blow up"问题

对一类非线性进化方程,它具有当 $t\to\infty$ 时它的光滑解的局部 L^2 模趋于零的渐近性. 我们用一种较简单的证明方法举例说明. 另外,对于某些非线性进化方程,虽然它的局部解存在,但它的整体解却不存在. 实际上,当 $t\to t_1$(有限的)时,它的解的 L_2 模将趋于无穷,这种现象称为解的"*blow up*". 现已发现不少非线性进化方程具有这种性质. 这一节,我们将举二例说明之.

现考虑如下广义 KdV 方程的初值问题.

$$u_t+(u_{xx}-f(u)-u)_x=0,\quad (x\in R,\ t>0) \tag{6.1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in R \tag{6.2}$$

引理 1 设 $u(x,t)$ 为问题(6.1),(6.2)的古典解. 且满足: (i) $\lim\limits_{|x|\to\infty}(|u|+|u_x|+|u_{xx}|)(xt)=0$, $\forall t\geqslant 0$

(ii) $f(s)$ 为实值连续函数,且 $f(s)s\geqslant 0$;

若令 $F(u)=\int_0^u f(s)ds$, 则有 $F\geqslant 0$. 我们有

$$\|u(t)\|=\|\varphi\|,\ \forall t\geqslant 0$$

证明 (6.1)乘以 u, 得

$$(u^2)_t+(u^2)_{xxx}-(3(u_x)^2)_x-(2f(u)u)_x$$
$$+(2F(u))_x-(u^2)_x=0$$

在$(-\infty,\infty)$上对 x 积分,即得引理结论.

定理 1 设 $u(x,t)$ 为问题(6.1),(6.2)的古典解,且满足(i), (ii), 我们再设:

$$f(u)u \geqslant F(u) \tag{6.3}$$

则有

$$\int_0^\infty \int_{-r}^r (|u|^2 + |u_x|^2) dx dt < \infty, \ \forall r > 0 \tag{6.4}$$

如果进一步设：存在正常数 α，使得

$$(1-\alpha)f(u)u \geqslant F(u), \ 0 < \alpha < 1 \tag{6.5}$$

则有

$$\int_{-r}^r |u|^2 dx \to 0, \ t \to \infty, \ \forall r > 0 \tag{6.6}$$

证明 设 A 为 x 的函数，且 $A \in C^3$，将(6.2)乘以 A 得

$$\begin{aligned}(Au^2)_t &+ \{A(u^2)_{xx} - A_x(u^2)_x + A_{xx}u^2 - 3A(u_x)^2 \\ &- 2Af(u)u + 2AF(u) - Au^2\}_x \\ &+ (-A_{xx} + A_x)u^2 + 3A_x(u_x)^2 \\ &+ 2A_x(f(u)u - F(u)) = 0\end{aligned} \tag{6.7}$$

进一步假设 A 满足 $A_x > 0$，$-A_{xxx} + A_x > 0$，且 $|A|$，$|A_x|$，和 $|A_{xx}|$ 为有界。显然这种 A 是易于找到的。(6.7) 在 $(-\infty, \infty) \times [0, T]$ 上积分，由(6.3)和引理 1，我们有

$$\int_0^\infty \int_{-r}^r (u^2 + u_x^2) dx dt < \infty \tag{6.8}$$

如果还满足(6.5)，则有

$$\int_0^\infty \int_{-r}^r f(u)u(x, t) dx dt < \infty \tag{6.9}$$

我们现在利用 Morawetz[37] 的概念，证明

$$\int_{-r}^r u^2 dx \to 0, \ t \to \infty, \ \forall r \geqslant 0$$

设 $B(x) \in C_0^\infty(R)$，$0 \leqslant B(x) \leqslant 1$，且

$$B(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant r \\ 0, & |x| \geqslant 2r \end{cases}$$

则从(6.7)有

$$\left| \int_{-2r}^{2r} Bu \cdot u_t dx \right| \leqslant C \int_{-2r}^{2r} [u^2 + u_x^2 + f(u)u] dx$$

令 $0 < t_1 < t$，则有

$$(t - t_1)\int_{-r}^{r} u^2(x, t)dx \leqslant (t - t_1) \cdot \int_{-2r}^{2r} Bu^2(x, t)dx$$

$$\leqslant \int_0^t \int_{-2r}^{2r} Bu^2(x, \tau)dxd\tau + 2\int_{t_1}^{t} (\tau - t_1) \left|\int_{-2r}^{2r} Bu \cdot u_t(x, \tau)dx\right| d\tau$$

令 $t_1 = t - 1$，则

$$\int_{-r}^{r} u^2(x, t)dx \leqslant C\int_{t-1}^{t} \int_{-2r}^{2r} [u^2 + u_x^2 + f(u)u]dxd\tau$$

从(6.8)，(6.9)可得

$$\int_{-r}^{r} u^2(x, t)dx \to 0, \ t \to \infty, \ \forall r > 0$$

附注 如 $f(u) = u^p$，$p \geqslant 3$，p 为奇整数。则易验证定理 1 条件的(ii)及(6.3)，(6.5)均满足。

我们现在考虑解的"*blow up*"的二个例子。

例 1 考虑初值问题:

$$u_{tt} - u_{xx} = u^n \quad (n > 1) \tag{6.10}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in R) \tag{6.11}$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x) \quad (x \in R) \tag{6.12}$$

易证，如 u_0, $v_0 \in C_0^\infty(R)$，则存在问题(6.10)—(6.12)的局部解 u，我们将证明如适当选取 u_0, v_0，则 $F(t) = \int_R u^2(x, t)dx$ 在有限时间将趋于无穷. 现设能找到 $\alpha > 0$，和初值 u_0, v_0，使得

(A): $(F(t)^{-\alpha})'' \leqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$,

(B): $(F(t)^{-\alpha})' < 0$, $t < 0$.

则显然 $F(t)^{-\alpha}$ 在有限时间内趋于零. 因而 $F(t) \to \infty$，如图

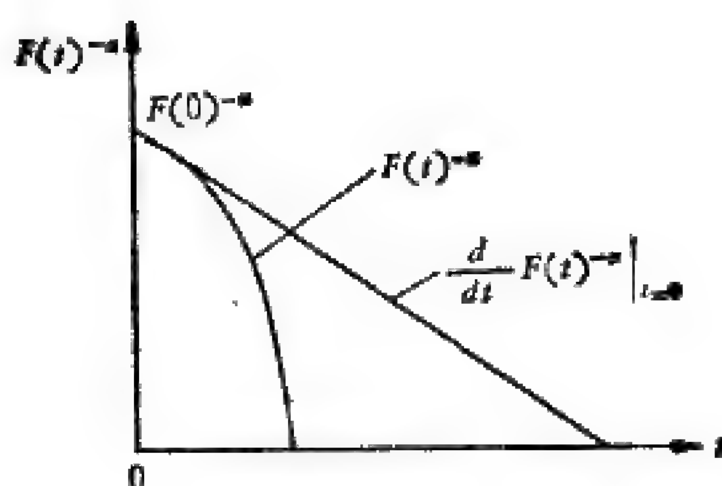


图 9-1

9-1 所示.

对于条件 (B)，只要选取 u_0，v_0 在$(-\infty,+\infty)$上同号，则自动满足．因

$$(F(0)^{-\alpha})' = -\alpha F(0)^{-1-\alpha}F'(0)$$

$$= -2\alpha F(0)^{-1-\alpha}\int u_0 v_0 dx < 0$$

因此,只要验证条件 (A)，因 $F(t)\geqslant 0$，要证明 (A) 只需证明 $Q(t)\geqslant 0$．于此，

$$Q(t) = (-\alpha)^{-1}F^{\alpha+2}(F^{-\alpha})'' = F''F - (\alpha+1)(F')^2$$

因

$$F'(t) = 2\int uu_t dx$$

$$F''(t) = 2\int (uu_{tt} + u_t^2)dx$$

$$= 4(\alpha+1)\int u_t^2 dx$$

$$+ 2\int (uu_{tt} - (2\alpha+1)u_t^2)dx$$

$$Q(t) = 4(\alpha+1)\left\{\left(\int u^2 dx\right)\left(\int u_t^2 dx\right) - \left(\int uu_t dx\right)^2\right\}$$

$$+ 2F(t)\left\{\int uu_{tt}dx - \int (2\alpha+1)u_t^2 dx\right\}$$

上式右端第一项由 Schwartz 不等式为正的，故只需使$H(t)\geqslant 0$，于此

$$H(t)=\int uu_{tt}dx-(2\alpha+1)\int u_t^2dx$$
$$=\int u^{n+1}dx+\int uu_{xx}dx-(2\alpha+1)\int u_t^2dx$$
$$=\int u^{n+1}dx-\int u_x^2dx-(2\alpha+1)\int u_t^2dx$$

(6.10)—(6.12)的能量守恒为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int(u_t^2+u_x^2)dx-\frac{1}{n+1}\int u^{n+1}dx$$

即 $E(t)$ 与 t 无关，因此，如果选取 α 使得

$$2(2\alpha+1)=n+1$$

我们有

$$H(t)=-(n+1)E(t)+2\alpha\int u_x^2dx$$
$$=-(n+1)E(0)+2\alpha\int u_x^2dx \tag{6.13}$$

因此，如 $E(0)<0$，且 $\alpha=\frac{1}{4}(n-1)>0$，则$H$永远严格为正。现选取 $u_0\geqslant 0$，$v_0\geqslant 0$，则条件（B）满足。我们将 u_0 乘以正常数，使得 $E(0)<0$（当 $n+1>2$ 时是可能的），对任何这样的初始值，$F(t)$ 在有限时间内趋于无穷。

如果我们考虑方程

$$u_{tt}-u_{xx}=-u^n \tag{6.14}$$

则易知$H(t)$仍满足(6.13)。如果 n 为偶数，且选取 $u_0(x)\leqslant 0$，$v_0(x)\leqslant 0$，u_0 充分大，使得 $E(0)\leqslant 0$，因而(B)条件满足。它的解也在有限区间"*blow up*"。另一方面，n 为奇数，因 $E(t)\geqslant 0$。结论是不清楚的，这是不奇怪的。例如对于 $-u^3$ 情况，我们知道它还有整体解。

例 2 我们考虑高维非线性 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{cases} iu_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in R^n, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in R^n \end{cases} \tag{6.15}$$

我们有如下结果.

定理 2 若满足以下条件

(i), $E(0) = \int_{R^n} \left(|\nabla\varphi|^2 - \frac{2}{p+1} |\varphi|^{p+1} \right) dx \leqslant 0$

(ii) $\mathrm{Im} \int_{R^n} r\bar{\varphi}\varphi_r dx > 0$, 其中 $r^2 = |x|^2$

(iii) $P > 1 + \frac{4}{n}$

则 $\|\nabla u(t)\|_{L_2}$ 和 $\|u(t)\|_{L^\infty}$ 在有限时间内趋于无穷.

附注 条件 (ii) 也是易于验证的,例如取

$$\varphi(x) = e^{i|x|^2}\phi(x),$$

其中 $\phi(x)$ 为任何实值函数,则由直接计算可得

$$\mathrm{Im} \int_{R^n} r\bar{\varphi}\varphi_r dx = 2 \int r^2 |\phi|^2 dx > 0$$

对于其它非线性进化方程解的"*Blow up*"现象,和 $t \to \infty$ 的渐近性质,可参见[36—44].

第七节 Захаров 方程组及其他一些耦合的非线性进化方程组的定解问题

在等离子体物理的孤立子研究中,对于激光和等离子体的相互作用,Захаров 给出一类很重要的方程组,通称 Захаров 方程组. 即

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial |\varepsilon|^2}{\partial x^2} = 0 \tag{7.1}$$

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} - n\varepsilon = 0 \tag{7.2}$$

其中，n 表示离子密度的扰动(涨落)．它是变量 x，t 的实值函数，ε 表示电场，它是变量 x，t 的复值函数．Захаров 找到了(7.1)，(7.2)的孤立子解，并研究了这些孤立子的特征．我们现从微分方程上研究它．为此，引进势函数 φ，将(7.1)转化为方程组：

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - (n + |\varepsilon|^2) = 0 \tag{7.4}$$

我们讨论 (7.2)—(7.4) 的周期初值问题，即求方程组 (7.2)—(7.4)的对 x 而言是周期 2π 的解 $\varepsilon(x, t)$，$\varphi(x,t)$ 使其满足初始条件

$$n(x, 0) = n_0(x),\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x),$$
$$\varepsilon(x, 0) = \varepsilon_0(x)\ \ (-\infty < x < \infty) \tag{7.5}$$

这里假定 $n_0(x)$，$\varphi_0(x)$，$\varepsilon_0(x)$都是周期 2π 的函数．

我们用 Galerkin 方法构造问题(7.2)—(7.5)的近似解，并对近似解作出先验估计，从而得到了下述的定理

定理 1 若 $\varepsilon_0(x) \in H^6$，$\varphi_0(x) \in H^4$，$n_0(x) \in H^4$，且它们是周期 2π 的函数，则问题(7.2)—(7.5)的局部古典解是存在的．

根据先验估计，我们可把局部解延拓到大范围，从而得到它的整体解．我们有

定理 2 若满足定理 1 的条件，则问题(7.2)—(7.5)的整体古典解是存在的．

如果我们进一步提高初值函数的光滑性，可得到如下的光滑解．

定理 3 若 $\varepsilon_0(x) \in H^6$，$\varphi_0(x) \in H^6$，$n_0(x) \in H^6$且它们是周期为 2π 的函数．则问题(7.2)—(7.5)的整体光滑解(即存在

对 t 二阶微商的解)是存在的、唯一的。

有了上述结果，容易研究 Захаров 方程的周期初值问题：即求(7.1)，(7.2)的对 x 而言是周期 2π 的 $n(x,t)$，$\varepsilon(x,t)$，使之满足初始条件

$$n(x,0)=n_0(x),\ \frac{\partial n}{\partial t}(x,0)=n_1(x),$$

$$\varepsilon(x,0)=\varepsilon_0(x) \tag{7.6}$$

其中，$n_0(x)$，$n_1(x)$，$\varepsilon_0(x)$均为周期 2π 的函数。

定理 4 若 $n_0\in H^6$，$n_1\in H^4$，$\varepsilon_0\in H^8$，且是周期为 2π 的函数，则问题(7.1)，(7.2)，(7.6)的整体古典解是唯一存在的。

对于一类 KdV 一非线性 Schrödinger 耦合方程组

$$i\varepsilon_t+a\varepsilon_{xx}-bn\varepsilon=0 \tag{7.7}$$

$$n_t+\frac{1}{2}[\beta n_{xx}+n^2+|\varepsilon|^2]_x=0 \tag{7.8}$$

的 Cauchy 问题

$$\varepsilon|_{t=0}=\varepsilon_0(x),\ n|_{t=0}=n_0(x)\ (-\infty<x<\infty) \tag{7.9}$$

我们有如下的结果：

定理 5 若(i) $\varepsilon_0(x)$，$\eta_0(x)\in H^s(s\geqslant 3)$ (ii) 常系数 a 和 $b\beta$ 反号，则方程组(7.7)，(7.8)的 Cauchy 问题和周期问题的整体解是唯一存在的，且其解 $n(x,t)$，$\varepsilon(x,t)\in L^\infty(0,T;H^s)$。

至于其它一些非线性进化方程的耦合方程组的整体解结果可参见[43—46]。

参 考 文 献

[1] Sjöberg, Uppsala Univ, Rept of Comp. sci, Uppsala Sweden, 1967.

[2] Sjöberg, *J. Math. Anal and Appl.*, **29**(1970), 569—579.

[3] P. D. Lax, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **21**(1968), 467—490.

[4] R.Temam, *J. Math Pures et Appl.*, **48**(1969), 159—172.

[5] J. L. Lions, Equations differentieties Opératimelles et Problems aux limites, Springer, Berlin, 1961.
[6] J. L. Lions, Quelques Method de Reselution des Problemes aux limites nonlineaires, Dunod, Paris, 1969.
[7] J. L. Bona, R. Smith, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A278 (1975), 555—601.
[8] T. E. Dushane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **188**(1974),77—96
[9] 郭柏灵,数学学报,第二十五卷,第六期, 1982, 641—656.
[10] 管志成,浙江大学学报,第四期, 1979, (数学专辑),80—92.
[11] Н. В. *Николенко, Умн, Том* **35**, *Вып* **5** (215) (1980), 121—180.
[12] 郭柏灵,数学学报,第二十六卷,第五期, 1983, 513—532.
[13] Bui. An Ton, *J. Diff. Equation.*, Vol. **25** (1977), 288—309.
[14] 周毓麟,郭柏灵,数学学报,第二十七卷,第二期, 1984, 154—176.
[15] Jeng-Eng Lin, *J. Diff. Equation.*, **29** (1978), 467—473.
[16] W. A. Strauss, *Arch. National. Mech. Anal.*, **55**(1974), 86—92.
[17] Gou Boling (郭柏灵),In "Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations", Vol **3**, 1227—1246, Science Press, Gordon and Breach, Science, Publishers, Inc.
[18] Guo Boling (郭柏灵), *Kexue Tongbao, Special Issue* (1983), 20—25.
[19] 郭柏灵,数学物理学报,第一卷,第三期至四期, 1981, 261—274.
[20] Zhou Yulin (周毓麟) and Guo Boling (郭柏灵), on the solvability of the Inifial Value Problem for the Quasilinear Degenerate Parabolic System, In "Proceedings of the 1982 Changchun Symposium on Differential Geometry and Differential Equations", Science Publishers, Inc.
[21] 郭柏灵,浙江大学学报,第2期, 1983, 23—31.
[22] G. J. Ginibre, G. Velo, J. Funct, *Anal.*, **32**(1979), 1—32, 33—71.
[23] Zhou Yulin (周毓麟)and Guo Boling (郭柏灵), The Existence of weak solution of the boundary problem for the Systems of Ferro-Magnetic Chain, In "Proceedings of the 1982 Changchun Symposium on Differential Germetry and Differential Equations", Science Publishers, Inc.
[24] H. Pecher, *Von Wabl. Woy, Manuscripta Math.*, **27**(1979), 157.
[25] M. Tsutsumi, N. Hayashi, *Math. Z.*, **177**(1981), 217—234.
[26] M. Reed, and B. Simon, Methods of Modern Mathematical. Physics., II: Fourier Analysis, Self Adjointness, Academic Press, New york, San Francisco, Landon, 1978.
[27] I. Segal, *Ann. Math.*, **78**(1963), 339—364.
[28] L. Gross, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **19**(1966), 1—15.
[29] J. Chadam, *J. Math. Phys.*, **13**(1972), 597—604.

[30] Guo Boling (郭柏灵), *Kexue Tongbao.*, Vol. **27**(1982), No. 9, 915—920.
[31] Guo Boling (郭柏灵), *Acta. Math. Sci. Sinica.*, Vol. **2** (1982), No. 3, 641—656.
[32] 郭柏灵,沈隆钧,应用数学学报,第五卷,第三期,1982,310—324.
[33] Guo Boling (郭柏灵), *Sci. Sinica (serA)*, Vol. **XXV**, No. 9(1982), 897—910.
[34] Guo Boling (郭柏灵) *Sci. Sinica(serA)*, Vol. **XXVI**, No. 6 (1983), 561—575.
[35] 郭柏灵,数学学报,第二十六卷,第五期, 1983, 513—532.
[36] L. A. Medeiros and M. M. Miranda, *J. Math. Anal. Appl.*, **59** (1977)432—441.
[37] C. S. Morawtz, *Proc. Roy. Soc. Sera.*, **306** (1968), 291—296.
[38] J. Keller, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **10**(1957), 523—532.
[39] H. Levine, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**(1973), 371—386.
[40] F.John, *Manuscripta Math.*, **28**(1979), 235—268.
[41] H. Fujita, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo set I.*, **13**(1966), 109—124.
[42] Zhou Yulin (周毓麟) and Guo Boling (郭柏灵), The Periodic Boundary Problems and the Initial Value Problems for the systems of the Generalized korteweg-de Vries Type of High order, In "Proceedings of the 1982 Changchum Symposium on Differential Geometry and Differential Equations," Science Press.
[43] Zhou Yulin (周毓麟) and Guo Boling (郭柏灵), *Sci. Sinica (ser. A)*., Vol. **27**(1984), No. 8, 799—811.
[44] Guo Boling(郭柏灵), Some Problems for a Wide System of Zakharov Equations. In "Proceedings of the 1982 Changchum Symposium on Differential Geometry and Differential Equations", Science Press.
[45] 郭柏灵,科学探索,第三卷,第二期, 1983, 31—40.
[46] 周毓麟,符鸿源,数学学报,第二十六卷,第二期,1983, 234—249.
[47] Guo Boling, *Chin. Ann. of Math.*, 6B(3)(1985), 281—287.

第十章　拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子

第一节　孤立子与基本粒子

本章我们将研究在基本粒子物理中的孤立子运动．虽然孤立波的发现已有三百多年的历史，但这个问题只是近几年来才被提出来．孤立子和某些已观察到的基本粒子到底有什么关系，是值得深入研究的．它能和某些基本粒子划等号吗？还是担任其它角色呢？由于孤立子来源于波现象，一般总认为它和电子、质子不相同，因此它能否描述粒子？至今有人还有异议．为了对这个问题有一个初步认识，我们不得不追叙一下人们对基本粒子的认识过程． 大约在半个世纪以前，人们发现了所谓微观粒子具有波-粒二象性． 这首先是在光的现象中发现的．原来人们都认为光是一种电磁波．按照这种理论，光的能量应当是连续地分配在光波上．但是“光电效应”，“Compton 散射”的实验却表明光的能量是不连续的．就单色光而言，每一份最小的能量是 $\hbar\nu$（ν 是单色光的频率，$\hbar$ 是普朗克常数），于是产生了“光子”概念．在普朗克和爱因斯坦的光量子概念上，后来 L. De. Broglie 提出象电子，质子等微观粒子和光子一样也具有波动性．这种性质能在它的传播等过程中明显地表现出来． 并用关系式 $P=\hbar/\lambda$， $E=\hbar\omega$，把粒子性和波动性有机联系起来（P，E 是粒子的动量和能量，λ 和 ω 是波的波长和频率）． L. De. Broglie 的这种想法很快就被实验物理学家用电子束通过一个晶体箔所出现的绕射条纹（正像 X 光波通过晶体一样）等实验所证实，以后又

用分子束、原子束进行了实验,都得到了相同的结果. 这一切表现,微观粒子都具有波-粒二重性. 量子场论就是综合地描述了微观粒子的这两种性质而建立起来的一门科学.

正是由于微观粒子的这种两重性, 所以当人们发现孤立子,并认识到它既有波动性,又能保持形状大小不变, 有类似于粒子的特征之后,就企图把它引进微观粒子的研究中来,那是很自然的. 其实,早在三十年代初,Born 就企图将 Maxwell 方程加上非线性修正项, 并由此非线性方程的定域奇点来描述电子,即前面提到的 Born-Infeld 方程. 将基本粒子看成是非线性场方程的定域奇点倒是一个奇妙的想法, 但这种理论不能把波动力学中的一些很成功的结论包括进去, 因此多年来一直没有得到多大发展. 后来 L. De. Broglie 在他"双重解理论"的基础上发展了这一理论,企图对微观粒子作定域描述,但理论本身有一些致命弱点,进展不大.

另一方面,许多实验事实表明基本粒子是有内部结构,如强子是由夸克或层子组成的结论,在当今已为大家接受了.但另一方面,经过种种顽强的努力,现并未找到自由夸克存在的直接证据,特别是根据深度非弹性散射实验资料的分析,处于强子内部的夸克质量很小(约几十到几百 MeV),这样质量的粒子,仅从能量上考虑,早就应当在加速器实验中发现了. 上述这两个相互矛盾的实验事实的协调, 使人认为: 构成强子的层子之间的相互作用使单个夸克难以或永远不能逸出强子,这称为"夸克囚禁"

在对"夸克囚禁"的研究中, 一种可能是自由夸克的质量很大,比强子质量大得多,所以形成强子时要放出巨大的结合能,要把强子中的夸克分开也要极大能量才行, 这称为"部分囚禁". 另一种可能性是夸克永远不能从强子中单个跑出来. 这叫"永久囚禁". 对此,在 1974—1975 年间提出了弦模型和

口袋模型来唯象地描述夸克的“永久囚禁”．其中口袋模型有 MIT 口袋和 SLAC 口袋．两模型出发点不同，但它们被约束在类似于口袋一样的东西之中．它们所谓的口袋也可以认为是孤立子的某种形态，口袋模型的作者把夸克比作一个小昆虫，这种昆虫喜欢在沙土上钻洞而用沙土把自己掩埋起来，孤立子正好为这种昆虫(夸克)提供了一个适当的掩体；或认为这小昆虫只能处在袋壁附近，要使它离开袋壁自由运动，需要巨大能量（> 10MeV），在目前条件下无法实现．因此观察不到自由夸克存在．

在“弦模型”中认为强子是一条弦，夸克永远“粘”在弦的末端．他们采用了超导类比：把强子之外的真空看成某种“超导相”，而强子内部的超导弦相当于“磁力线”，就象在第 II 类超导体中磁场不能穿透到超导体内，却被约束于磁力线管中那样，夸克之间的胶子场也被真空超导相约束在一条弦上．还有人猜测可能在真空中凝聚了许多磁单极偶，使真空相由正常相变成一种特殊的“囚禁相”，它提供了某种真空压力，把强子内的胶子场约束在一个口袋中不会逸散．仿佛液体挤压其中的气泡那样．

至于磁单极是 1931 年由 Dirac 首先提出的新概念．1974 年荷兰的 G. 'tHooft 发现这个磁单极子也是非线性方程的一种解，符合孤立子的定义，所以它又是一种孤立子．

由此看来，孤立子的引入对于解决基本粒子的一些基本问题是很有帮助的，所以近几年来，人们将某些非线性方程作为定域量子场方程的经典近似方程，求出它们的孤立子解，研究它的性质．由于基本粒子理论应是相对论协变的，因此具有 Lorentz 不变性的 Sine-Gordon 方程和 φ^4 场方程(即 Higgs 场方程)最适用于基本粒子理论．

李政道等人对基本粒子物理中的孤立子运动作过深入的

研究．他们的研究表明，夸克场是基本场，但不是能量的最低态，孤立子态才是能量的最低态，因而自然界中所观察到的强子实际上是一种孤立子，用这一理论他们已解释了“夸克囚禁”问题．最近他们又提出只要真空是理想的抗色电介质，就可以说明强子是孤立子，解释“夸克囚禁”问题也就不会象以前的讨论那样，一定要引入 Higgs 玻色子了．同时他们还把现有孤立子分为拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子．

那么什么是拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子呢？他们的研究表明：在可重正化的相对论性定域场论中，所有孤立子特别是稳定的孤立子必须满足 Hamilton 最小作用量原理 $\delta s=0$ 导出的 Euler-lagrange 场方程，还必须加上稳定性要求：$\delta^2 s>0$．有两条路子可以做到这一点．两种做法的区别是使群分为拓扑性和非拓扑性的孤立子．拓扑性孤立子稳定地存在的一个必要条件是必须有简并真空（基态）态存在．因此，在无穷远处的空间可存在不同的简并真空态（基态），亦即可有不同的边界条件，如图 1-5 的（D）和（E）就属于拓扑性孤立子．在有孤立子解时，在无穷远处空间的边界条件就和没有孤立子解时不同，这类不一致的边界条件可以用几何上不同的拓扑性来表示．再引入拓扑荷的量子数后，可根据拓扑荷守恒来判定它是否稳定．

关于非拓扑性孤立子，它是与拓扑性孤立子不同的，它不需要简并的真空态（基态）．一切解，无论有无孤立子存在，在无穷远处都有相同的边界条件，钟型孤立子就属于这一类．但是，具有非拓扑性孤立子解的系统必须有加法守恒律，并存在一个标量场．因此，非拓扑性孤立子解具有普遍性，可以存在于任何维空间中．

拓扑性孤立子最重要的应用是在量子色动力学（QCD）中．QCD 是最近几年发展起来的一种强相互作用理论，它

的基础是非 Abel 规范理论. 后者的场方程都是非线性的，求解很困难，目前只在一些特殊情况下找到了非 Abel 规范场的拓扑性孤立子解. 例如，在一维空间($1D$)中有结状解；$2D$ 中有涡旋解；$3D$ 中有 G. 'tHooft 的磁单极子解及 $4D$ 欧氏空间中的 Polyakov 指出的瞬子 (*instanton*) 解. 出于物理上和数学上的考虑，这一章里我们主要是研究拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子. 因为就拓扑性孤立子而言，它可以帮助我们解决 QCD 中讨厌的电磁理论的局域规范不变性的 $U_A(1)$ 对称性问题，可能构成夸克的拓扑囚禁图象和量子色动力学 (QCD) 中的所谓"力学色盲"(即所有观察到的强子态都是无色的)的拓扑方案. 作为非 Abel 规范场的静无源解，它提供一个不含奇异点，场与源互相制约而构成自给稳定的有机统一体的一个例子. 还可能对重子数、同位旋、奇异数、粲数等量子数给予动力学解释，此外，还可能存在真实的物理磁单极孤立子等等. 最后，由于孤立子是相应经典场的非平庸解，我们有理由认为，这样的解在泛函积分中的贡献是占优势的，因此在计算泛函积分时，孤立子可能会起重要作用.

从数学的角度上看，孤立子在量子场论的数学发展中也会起一定作用. 由于孤立子的振幅的行为近似地与耦合常数成反比，所以它可能提供在微扰内容以外的理论线索. 由于孤立子的拓扑稳定性来源于场组态的动力学机制和拓扑性质，即对于非拓扑性孤立子的稳定性是通过随时间变化的振幅在动力学上达到的，它实际上是 nöether 定理给出的守恒量——nöether 荷. 拓扑性孤立子是与在非 Abel 理论中存在的一种与 Lagrange 函数的不变性无关的拓扑守恒量有关，它本身来源于场的内禀自由度，其拓扑稳定性也包含着一些拓扑内容，即内禀空间的流形 (*manifold*) 可以非平庸地映射到理论的实 D 维空间的流形上去. 因此对这些问题的研究，会促进

添上适当的可微性要求，就得到 n 维可微分流形的概念．即，在我们上述的相互重迭的方法中，如果是光滑的，则叫微分流形．另外，如果是有棱有角的，则叫分线段流形；如果是不怎么光滑的，但仍保持连续性，就是拓扑流形．这样一来，流形从局部看来都差不多，差别只是它们相互重迭的方式．例如，一维闭流形就是圆周．同时微分流形在不同条件下可配备有各种的几何结构，并且每个微分流形都能整体地配备有一个正定的 Reimann 度量，配备有正定 Reimann 度量的流形叫做 Reimann 流形．流形的整体性质往往表现为拓扑性质，或在不同程度上与拓扑性质有关．因此研究流形就是微分拓扑学的主要对象，它的基本目标就是给你两个流形，看你怎样判断它们一样还是不一样．这样一来就要分类，这分类可以是拓扑上的，也可更细致些．

那么何谓拓扑呢？这里我们参照度量空间的开集的性质来定义它[1]-[3]．设 S 是一个集合，而且 τ 是 S 的一个子集族，其中成员叫做 S 的开集（所谓开集是：设 A 是度量空间 X 的一个子集，如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$，则 A 叫 X 的开集）．如果 τ 满足：①s 与空集 ϕ 是开集；②两个开集的交集是一个开集；③任意多个开集的并集是一个开集．则 τ 叫做集合 s 的一个拓扑，集合 s 与它的一个拓扑 τ 在一起叫做一个拓扑空间，常记为 (s, τ)． 现在讲的拓扑学便是研究图形在连续变形下的不变特性．

在拓扑学中有一个重要概念是映射．如果 X 与 Y 都是度量空间，$f: X \to Y$ 是一个从 X 到 Y 的对应，而且点 $x_0 \in X$，如果给定任一邻域 $U(f(x_0), \varepsilon)$，都存在一个邻域 $U(x_0, \delta)$，使得 $x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$，则说 f 在点 x_0 点处连续．如果 f 在 X 的每一点处连续，则说 f 在 X 中连续，这时 $f: X \to Y$ 叫做一个连续映射，简称为映射． X 和 Y 分别叫做

添上适当的可微性要求，就得到 n 维可微分流形的概念．即，在我们上述的相互重迭的方法中，如果是光滑的，则叫微分流形．另外，如果是有棱有角的，则叫分线段流形；如果是不怎么光滑的，但仍保持连续性，就是拓扑流形．这样一来，流形从局部看来都差不多，差别只是它们相互重迭的方式．例如，一维闭流形就是圆周．同时微分流形在不同条件下可配备有各种的几何结构，并且每个微分流形都能整体地配备有一个正定的 Reimann 度量，配备有正定 Reimann 度量的流形叫做 Reimann 流形．流形的整体性质往往表现为拓扑性质，或在不同程度上与拓扑性质有关．因此研究流形就是微分拓扑学的主要对象，它的基本目标就是给你两个流形，看你怎样判断它们一样还是不一样．这样一来就要分类，这分类可以是拓扑上的，也可更细致些．

那么何谓拓扑呢？这里我们参照度量空间的开集的性质来定义它[1-3]．设 S 是一个集合，而且 τ 是 S 的一个子集族，其中成员叫做 S 的开集（所谓开集是：设 A 是度量空间 X 的一个子集，如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$，则 A 叫 X 的开集）．如果 τ 满足：①s 与空集 ϕ 是开集；②两个开集的交集是一个开集；③任意多个开集的并集是一个开集．则 τ 叫做集合 s 的一个拓扑，集合 s 与它的一个拓扑 τ 在一起叫做一个拓扑空间，常记为 (s, τ)． 现在讲的拓扑学便是研究图形在连续变形下的不变特性．

在拓扑学中有一个重要概念是映射．如果 X 与 Y 都是度量空间，$f: X \to Y$ 是一个从 X 到 Y 的对应，而且点 $x_0 \in X$，如果给定任一邻域 $U(f(x_0), \varepsilon)$，都存在一个邻域 $U(x_0, \delta)$，使得 $x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$，则说 f 在点 x_0 点处连续．如果 f 在 X 的每一点处连续，则说 f 在 X 中连续，这时 $f: X \to Y$ 叫做一个连续映射，简称为映射． X 和 Y 分别叫做

f 的定义空间与值空间．如果 $f(X)=Y$，则说 f 是从 X 到 Y 的满映射．

如果 $f: X \to Y$ 是从 X 到 Y 一一对应的、连续的满映射．并且逆对应 $f^{-1}: Y \to X$ 也是连续的，则 f 叫做拓扑映射或同胚． 如果存在拓扑映射 f，则空间 X 和 Y 叫做同胚的，记为 $X \cong Y$．度量空间的性质，在每一拓扑映射下是保持不变的，这叫做拓扑性质．而在连续变形(拓扑映射)下不变的量称为拓扑不变量．例如任何正多面体，不管多面体如何变形，其顶点数 V － 棱数 E ＋ 面数 F 就是一个拓扑不变量(这里为2)．对于一般情况，一个 M 图形，把它分成一些简单多面体时，则 $V-E+F-l+\cdots$(l 是体数) 也是一个拓扑不变量，它称为 M 的 Euler-Poincaré 示性数 K，它是一个很重要的拓扑不变量．但是，当一个图形在拓扑映射下变为另一个图形时，这个拓扑不变量或示性数如果是整数，我们又常称它为一个拓扑量子数或拓扑荷．但若根据 de.Rham 理论，它是由示性类和示性形式来定义的． 陈省身认为 $2K$ 次的示性形式决定一个维数为 $2K$ 的上同调类，因而称为示性类．从微分几何角度上讲，示性形式依赖于联络，但示性类只依赖于丛．它们是丛上最简单的整体不变量，它强调了局部性质，且示性形式比示性类包含更多的信息．当 N 是一个有定向的紧致流形时，最高维数的示性类(即其维数等于 N 的维数)的积分给出了示性数．当它是一个整数时，被称为一个拓扑量子数或拓扑荷．在拓扑性孤立子中它是一个十分重要的量子数．因为对于一个实际存在的拓扑性孤立子，都必须有一个拓扑荷，即有一个场的内部自由度．它可以象反演一样，是分立的，也可以象同位旋一样是连续的，以保证孤立子的稳定性．这样拓扑稳定性背后的主要思想是：内部场空间的流形可能在理论的实 D 维空间的流型上有一个非平庸的映射，以使孤立子保持稳定的

形状(这时拓扑荷不为零)．所谓非平庸映射就是指这个映射不能通过连续的无穷小变换变形到平庸映射．在平庸映象里一个流型的所有点被映射到另一个流型的一个点（这时拓扑荷为零)．以上这种映射直接与同伦有关．

然而，同伦又是拓扑学里一个极重要的概念，它有直观的意义，刻划出了拓扑空间中一个基本性质．例如 X 是圆周 S^1 时，自然地，$f_0, f_1: S^1 \to Y$ 叫做 Y 中的两条闭道路，这时 f_0 同伦于 f_1 的直观的说法就是：闭道路 f_0 能在 Y 中连续地变成闭道路 f_1．而正确的定义是：

设 $f_0, f_1: X \to Y$ 是拓扑空间 X 和 Y 之间的映射．如果存在一个从 X 上的柱形 $X \times I$（I 是实数轴上的单位闭区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$）到 Y 的映射 $F: X \times I \to Y$，使得

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x) \tag{2.1}$$

对于任意的 $x \in X$，我们就说 f_0 与 f_1 同伦，即 f_0 和 f_1 之间可通过一个连续变形 F 由一个变为另一个，记作

$$f_0 \simeq f_1: X \to Y \tag{2.2}$$

这样的 F 就叫作 f_0 到 f_1 的一个同伦或伦移．可以证明，在从 X 到 Y 的所有映射组成的集合 Y^X 里，同伦的关系$\simeq$是一个等价关系，即如果 $F: f_0 \simeq f_1$，和 $G: f_1 \simeq f_2$，则有 $H: f_0 \simeq f_2$．

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ G(x, 2t-1), & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

这样同伦等价的映射构成一个类，记为 $\{f\}$．因此，从 X 到 Y 的映射集合 Y^X 按同伦关系可分为若干等价同伦类．如果同伦类集合之间满足加法律：$\{f+g\} = \{g+f\}$，则可证明同伦类 $\{f\}$ 可以构成一个同伦群(它实际上是同伦类的不变量)．

为此把空间 X 取作具有互相等同端点的闭合线段 $I=\{0,I\}$，这个流形在拓扑上等价于一个圆 S^1. 圆的边界上一个参考点 X_0 等同于 0 和 1. 如果我们仅考虑满足 $f(0)=f(1)=g_0$ 的连续映象. y_0 是 Y 中的一个固定点，则从 $S^1\to Y$ 的映象 $\{f\},\{g\}\cdots$ 的等价类构成一个群，恒等元素 $\{e\}$ 是同伦于常数映象 C 的映象类. 即

$$C(x)=y_0, \quad \forall(x) \tag{2.4}$$

并且 $\{f\}$ 的逆是 $\{f^{-1}\}$，其中

$$f^{-1}(x)=f(1-x) \tag{2.5}$$

群乘法由映象的可乘性定义：$\{f\}*\{g\}=\{f\cdot g\}$

$$f\cdot g(x)=\begin{cases} f(2x), & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ g(2x-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

而这种乘法手续与从 $\{f\}$ 和 $\{g\}$ 中对代表映象的选择无关. 因为

$$f_1\sim f_2 \text{ 和 } g_1\sim g_2\to f_1\cdot g_1\sim f_2\cdot g_2 \tag{2.7}$$

以上这类同伦群叫做 Y 的第一同伦群，或者说基本群. 常记为 $\pi_1(Y)$. 它也是拓扑不变量. 球面的 π_1 只含零元素，也就是 S^1 的所有映射都同伦. Shanker[4] 对 $Y=R^2-(0,0)$ (挖去原点的二维欧几里德空间)及 y_0 是平面上任意一点这种情况作为这一群的一个例证. 从 $[0,1]$ 或 S^1 到 Y 的映象可以用平面上由 y_0 开始又回到 y_0 的圈来表示. 如图 10-1 所示. 这里，这些不绕过 $(0,0)$ 的圈，可缩到 y_0，因此属于一个恒等元素 $\{e\}=\{0\}$. 而顺时针方向绕过原点一次的圈属于一个记为 $\{1\}$ 的类. 绕二次的属于 $\{2\}$，…绕 n 次属 $\{n\}$ (逆时针的映象属于 $\{-1\},\{-2\},\cdots$ 类). 因此这种同伦群可记为

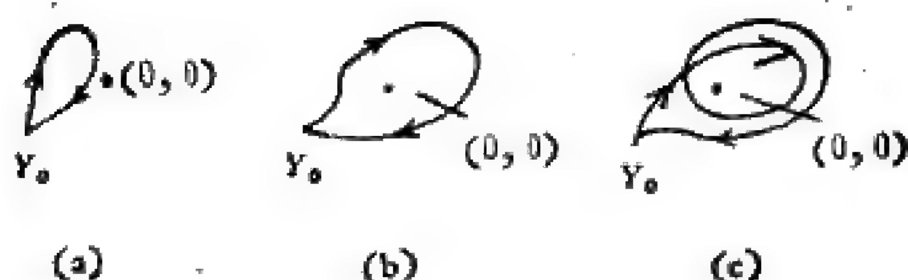


图 10-1 对于一个挖去一点的平面，不同绕数 0,1,2 表示拓扑不等价的映象.

$$\pi_1(R^2 - (0, 0)) = Z(\text{整数集合}) \tag{2.8}$$

群的乘法就变成了普通的加法．而与 $\{n\}$ 相联系的数 n 叫做绕数(如图 10-1 所示).

第一同伦群是研究紧致李群整体性质的一个重要工具．不变量 $\pi_1(G)$（它把从 S^1 到群 G 元素集合的映象分类)是群的连通性质的测定．在经过紧致后，李群是根据它们的定域性质(李代数)分类的．$\pi_1(G)$ 是用来把群分类的唯一的不变量．例如：$\pi_1(SU(2)) = 0$（即只有恒等的).

$$\pi_1(O(3)) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2(\text{同余 2 的整数集合}) \tag{2.9}$$

即 $SU(2)$ 是单连通的，而 $O(3)$ 是双连通的，这反映易在 $SU(2)$ 和 $O(3)$ 之间有 2 到 1 的同态关系.

第一同伦群可用来判定在特定的规范模型中是否存在 Nielsen-Olesen 涡旋[5]．以及如果它存在，又允许什么样的量子化通量,其具体情况下面要讲.

如果不限于 $X = S^1$，而推广到 $X = S^n$(n 维球)，或是 S^n 的拓扑等价 $I^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n|_{0<x_i<1}\}$($n$ 维立方体)，其边界(面)等同并等价于 S^n 的北极 x_0；则带有固定点 $f(x_0) = y_0$ 的映象的类又形成一个叫做 n 次同伦群的群，由 $\pi_n(Y)_0$ 来标志.

对于任意空间 Y,判断各种 $\pi_n(Y)$ 要复杂得多，这里不

表 10-1

Y	U(1)	SU(2)	N > 3 SU(N)	SO(3)	SO(4)	SO(5)	SO(6)	N > 7 SO(N)	SP(N)
$\pi_1(Y)$	Z	0	0	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	0
$\pi_2(Y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\pi_3(Y)$	0	Z	Z	Z	ZZ	Z	Z	Z	Z
$\pi_4(Y)$	0	Z_2	0	Z_2	Z_2Z_2	Z_2	0	0	Z_1
$\pi_5(Y)$	0	Z_2	Z	Z_2	Z_2Z_2	Z_2	Z	0	Z_2

再讲了. 在表 10-1 中列出了可能与物理有关的一些结果[6]. 有些直接可看出,有些则不行. 如有几个结果来自 $\pi_n(S^n) = Z$. 它说明了映象 $f: S^n \to S^n$ 的类是根据一个 n 维球把另一 n 维球覆盖多少次来标志的. 这个次数叫包数 (*Wrapping number*). 对 $SU(2)$ 或更高秩的 Yang-Mills 理论,这是一个极其重要的结果. 因为普通空间 R^3, 当∞的所有点等价时, 是等价于 S^3 的. 同时,所有具有形式:

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

以及 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 的 2×2 的幺正矩阵组成的 $SU(2)$ 群也等价于 S^3. 因此 $\pi_3(SU(2)) = \pi_3(S^3) = Z$, 这意味着 Yang-Mills 理论有无穷多个在拓扑上不同的真空存在.

另外,如果 G 是单连通紧致李群, 而 H 是 G 的一个子群, 则有

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H) \tag{2.10}$$

其中, G/H 是左陪集空间. 在 G. 'tHooft 和 Polyakov[7] 的原始模型中,

$$\begin{cases} G = SU(2),\ H = U(1)(\text{保持真空不变的 } f \text{ 群}) \\ \pi_2(SU(2)/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z \end{cases} \tag{2.11}$$

这意味着无限种磁单极的可能性是存在的，虽然到现在还只找到一个。因此同伦群 π_2 的研究对于判定非 Abel 理论是否可能具有有限能量的磁单极解很有用。

当然，同伦论在物理上的应用还很多，有些还不很清楚，需要继续研究。

第三节　一维空间的拓扑性孤立子

首先叙述一下 Derrick 定理[8]，即由

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-U(\varphi) \tag{3.1}$$

（其中，$U(\varphi)>0$，$U(\varphi)=0$ 对应于真空态）所描述的标量场论，除了空间维数 $D=1$ 的情况外，没有静止的（与时间无关的）非奇异的孤立子解存在。

这是因为：若 $\varphi_s(x)$ 是一个能量 $H=V_1+V_2$ 的孤立子解，其中

$$V_1=\int(\Delta\varphi_s(x))^2d^lx,\qquad V_2=\int U(\varphi_s)d^lx$$

这样，场的组态 $\varphi_s(x/a)$ 就有能量：

$$H(a)=a^{D-2}V_1+a^DV_2$$

但是，H 必须对 φ 的任意变分是稳定的，特别是对一个标度的改变，必须有

$$\left.\frac{\delta H(a)}{\delta a}\right|_{a=1}=(D-2)V_1+DV_2=0$$

由于 V_1 和 V_2 都是正的，所以这个方程只能在 $D=1$ 时有解，由此得证。显然，此结论可推广到具有多于 1 个标量场的情况。

对于纯 Yang-Mills 理论（具有紧致规范群），可证明

Derrick 定理的一个变体即除了 $D=4$ 外，在 D 空间维数中，只有纯规范场方程的静态的有限能量解才是 $A_\mu=0$ 的变换. 它是 Coleman 用类似于标量情况下所用的无标度性讨论得出的. 以上是量子场论中的"行不通"($n0$-$g0$)定理. 即对纯标量场只有一维的孤立子解，对纯 Yang-Mills 场只有四维的孤立子解，除此之外没有别的孤立子解[9].

应注意，动力学的非拓扑性孤立子由于有时间相关，不受这定理限制，同时该理论对于 2 维和 3 维空间的静态标量-规范场孤立子也没有限制. 其实，下几节讲的涡旋和磁单极就是这种可能性的例子. 另外 $D=4$ 的膺粒子或瞬子是 Coleman 和 Deser 定理的一个例外.

现在我们来研究一维空间的拓扑性孤立子[10]. 因拓扑性孤立子需要真空简并，所以 V 的最小值不止一个. 设 V 的最小值为零，如图 10-2 所示.

$$V(a)=V(b)=\cdots=0$$

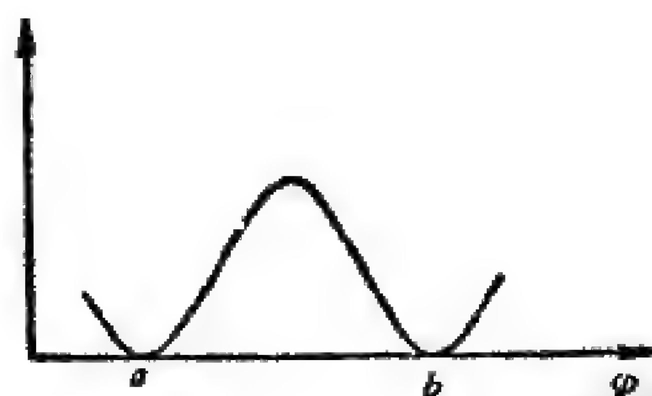


图 10-2 V(φ) 形式.

从 (3.1) 式可得运动方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{dV}{d\varphi}=0$$

假定 $\varphi=\varphi(x)$ 是实数场，并与时间无关. 则得

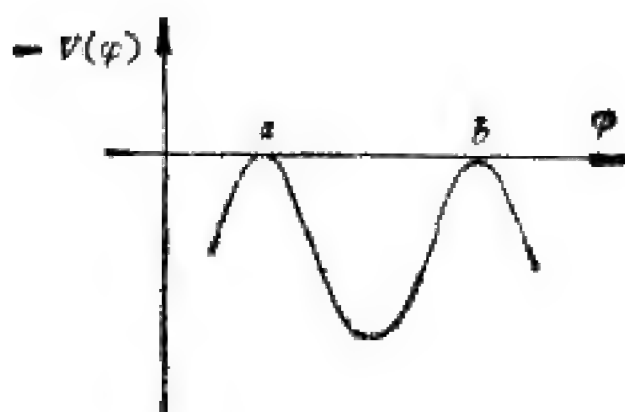


图 10-3 $-V(\varphi)$ 形式.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{dV}{d\varphi}=0$$

积分一次得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2-V(\varphi)=\text{常数} \tag{3.2}$$

它对应的非相对论性的力学模型是相对于空间坐标为 φ、时间为 x、质量为 1 的质点的运动，(3.2) 式就表示质点的能量是守恒的，其势能为 $-V$，如图 10-3 所示．动能为 $\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$．假定在 $x=-\infty$ 时，质点在 a 点，向右轻推它一下，它就会沿曲线滚下去，在 $x=+\infty$ 时，到达 b 点．其能量显然是有限的，并且不弥散．其孤立子解为图 10-4 所示．它的能量密度束缚在 a，b 之间的一定范围内． 因为当 $x\to a$ 或 b 时，

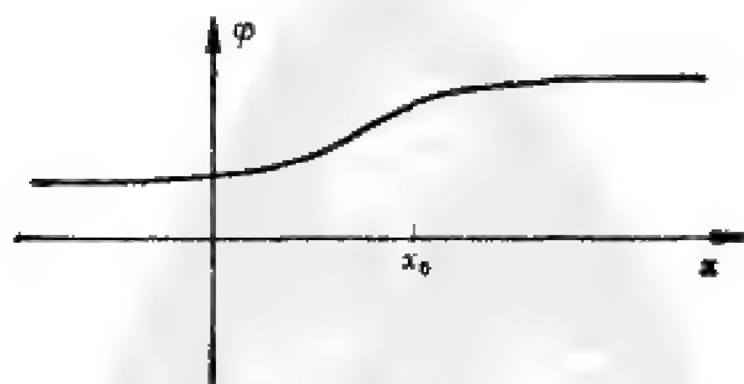


图 10-4 拓扑性孤立子解。

$\frac{d\varphi}{dx}\to 0$ 和 $V\to 0$，同时它在 $x=\pm\infty$ 处的边界条件不同，所以它被称为拓扑性孤立子．它可看成是满足"$x\to-\infty$ 时，$\varphi=a$ 和 $x\to+\infty$ 时 $\varphi=b$" 的边界条件的最低能量解．因此，它是稳定的．如果在 $x=-\infty$ 时，质点在 b 点，$x=+\infty$ 时质点在 a 点，则所产生的孤立子叫反孤立子解．因此，正、反孤立子在经典场论中都存在．

所有这类孤立子解可由(3.2)中令常数等于零而得到，即

$$x-x_0=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{2V\ (\varphi')}} \tag{3.3}$$

其中 x_0 为一常数．另外，由于方程 (3.1) 式是 Lorentz 不变的，因此上述孤立子解只要作一个 Lorentz 变换，便可得到运动的孤立子解．

一维空间中研究最多的是 $U(\varphi)=\frac{\beta}{4}(\varphi^2-m^2/\beta)^2$ 的 φ^4 场理论和 $U(\varphi)=\sin\varphi$ 的 Sine-Gordon (SG) 方程的孤立子解．这两个方程都有结状孤立子解，其运动方程都服从 Lorentz 不变性．下面仅研究 φ^4 场方程，SG 方程将在下章研究．

对于 φ^4 场理论的 Lagrange 函数为：

$$L=\int\mathscr{L}dx=\int\left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi-\frac{\beta}{4}(\varphi^2-m^2/\beta)^2\right]dx$$

$$(\alpha=0,\ 1) \tag{3.4}$$

作变换：$\varphi'=\sqrt{\beta}\varphi/m$，$x'=mx$，则 (3.4) 式变成：

$$L=\frac{m^3}{\beta}\int\left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi'\partial^\alpha\varphi'-\frac{1}{4}(\varphi'^2-1)^2\right]dx \tag{3.5}$$

其运动方程为

$$(\partial_x^2-\partial_t^2)\varphi'+\varphi'(1-\varphi'^2)=0 \tag{3.6}$$

对于静态解，它变成：

$$\varphi'_{x'x'} + \varphi'(1 - \varphi'^2) = 0 \tag{3.7}$$

对于这个方程的解，我们已是十分熟悉的了，可马上写出

$$\varphi' = \pm 1 \quad (\text{真空态}) \tag{3.8}$$

$$\varphi' = \pm\tanh\left(\frac{x' - x'_0}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{“+”表示结状}\\ \text{“−”表示反结状}\end{array}\right) \tag{3.9}$$

即

$$\varphi = \pm \frac{m}{\beta^{1/2}} \quad (\text{真空态}) \tag{3.10}$$

$$\varphi = \pm \frac{m}{\sqrt{\beta}}\,\mathrm{th}\left(\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}}\right) \quad \left\{\begin{array}{l}\text{“+”表结状}\\ \text{“−”表反结状}\end{array}\right. \tag{3.11}$$

其实如将

$$V(\varphi) = \frac{\beta}{4}(\varphi^2 - m^2/\beta)^2$$

代入 (3.3) 式，也可马上写出上述解来. 图 10-5 表示了这个

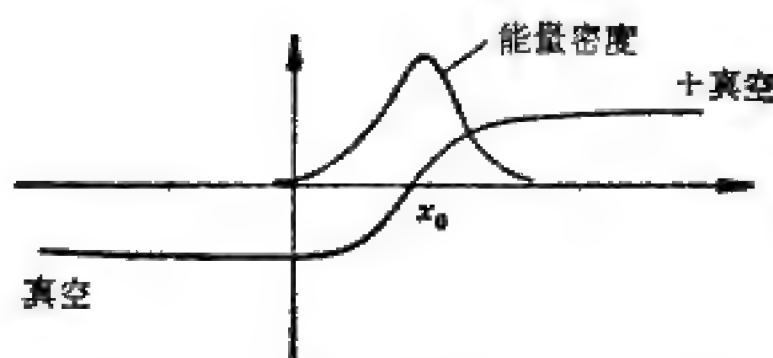


图 10-5　定域在 x_0 处具有结状的孤立子及它的能量密度.

解. 其结状孤立子解对应能量与真空态之间能量差我们可求得为

$$E_{\text{结状}} - E_{\text{真空}} = 2\sqrt{2}\, m^3/3\beta \tag{3.12}$$

和扭结相联系的不平凡的拓扑荷 K 叫扭数，它是流 J_ν 守恒的结果，即

$$J_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu L}\partial^\nu\varphi \quad (\varepsilon_{01} = \varepsilon_{10} = 1,\ \varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0)$$

则

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} J_0 dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2}\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} \quad (3.13)$$

对于结状(反结状) $K = 1(-1)$，即是非平庸映射，而对于真空 $K = 0$. 由于拓扑荷是绝对守恒的，因此要使场的组态耗散为真空，一般是相当困难的，因此，场的拓扑作用象一个无限的位垒，要使结状衰变为真空需要无限大能量，因此这孤立子是不衰减的．所以结状是稳定的．这种孤立子的稳定性可认为是简并真空带来的结果，这两个真空在 $\varphi \to -\varphi$ 反射下可以彼此转换． 结状插入在 $x = \pm\infty$ 处的两个真空之间，并与每一个真空在一个无限大范围内接近．只是在 $x = x_0$ 处，即能量密度的最大值处，它们彼此明显不同．这种情况下的同伦映象是场能 $\varphi = \pm 1$ 映射到点 $x = \pm\infty$ 的平凡映象．因此要形变结状态映象到任一个真空态都需要无限大的能量．

如前节所述，这种结状孤立子可以用来描述强子．而强子的夸克模型的 SLAC 口袋[11] 图象就是以上理论为基础的理论．其中夸克就分布在如图 10-6 所示的口袋的边缘上，不能跑出来．因此现在自由夸克找不到，除非给它足够大的能量，才能从强子中释放出自由夸克来．从而解释了“夸克囚禁”的问题．

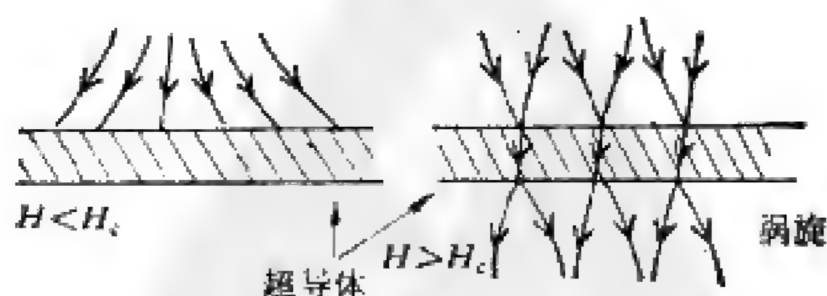


图 10-6 超导体中的 Meissner 效应和涡旋.

第四节　二维拓扑性孤立子

这种孤立子和第二类超导体由磁通量子化而形成的涡旋性(磁通线)结构相似，为此还是先介绍这方面有关的知识.

物质的超导性是指一些元素，合金和化合物在低于某一临界温度 T_c 的某温度下，电阻突然消失的现象. 超导体除具有完全导电性外，还有完全抗磁性，即超导体在 $T \leqslant T_c$ 时,会把体内原有的磁通排出体外,使其体内磁感应强度 $B = 0$. 又称它为迈斯纳效应. 现在已很清楚,超导态是由于传导电子和晶格振动相互作用所产生的吸引作用，使电子彼此结成 Cooper 电子时,形成的一种长程有序的相干态.

如果考虑一个超导圆环. 在 $T > T_c$ 时加一磁场,由于超导体处于正常态,环中产生的感应电流将立即消失,磁通穿过环孔. 然后把温度降到 T_c 以下,接着去掉磁场,由于现在处于超导态,环内感应的电流消失,因此环孔中就保留了一部分磁通,1961 年从实验上测得了这个磁通是量子化. 而从理论上已可证明环内磁通量也确如此,即

$$\varphi = \oint\!\!\oint \mathscr{H} \cdot ds = n\frac{h}{2e} = n\Phi_0$$

其中

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-5}$$

韦伯,称为磁通量子,n 是整数. 这式表明超导体的磁通是量子化的,它是一种宏观量子效应.

由实验得知,如果是 Ginsbary-Landau 参数 $K > \frac{1}{\sqrt{2}}$的第二类超导体，当外加的磁场H大于超导体的下临界场 H_{c1}

时，磁通线将以 $\varphi_0 = \frac{h}{2e}$ 为单位一根一根"注入"到超导体内，即在体内出现柱状结构的磁通线，这些磁通线又称为涡旋线，它"嵌入"在第 II 类超导体内，形成混合相。而这些量子化的涡旋线结构称为超导体的 Abrikosov 结构。在理想的第 II 类超导体中，在稳定状态时，它是有序地排列成三角形结构。这种 Abrikosov[12]结构，可以求解在外磁场中的超导体的宏观量子波函数所满足的非线性 Ginsbarg-Landau(GL) 方程得出。

Niélsen 和 Olesen 将以上这些概念和思想运用到场论中来。他指出标量 Higgs 场类似于超导体的有序参量的作用。因此，类似 Abel 型 Higgs 模型的相对论性场论也应具有静态涡旋性解。在下面我们将 Abel 涡旋性孤立子解和非 Abel 涡旋性孤立子解分别来研究。

(一) Abel 涡旋性孤立子解

在二维情况下一个 Abel 型 Higgs 模型的拉氏密度可写成：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^* D^\mu\varphi - \frac{1}{4}\beta\left(\varphi\varphi^* - \frac{m^2}{\beta}\right)^2 \tag{4.1}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \tag{4.2}$$

它表示：在定域规范不变理论下，电磁场 $A_\mu(x)$ 与复标量 Higgs 场 $\varphi(x)$ 的相互作用。由 E-L 方程可得到运动方程是

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu = -\frac{1}{2}ie(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*) + e^2A_\mu\varphi\varphi^* \tag{4.3}$$

$$D_\mu D^\mu \varphi = -\beta\varphi(\varphi\varphi^* - m^2/\beta) \tag{4.4}$$

这就是这种情况下的 G-L 方程组. 象这样的非线性的偏微分方程组是极难求解的. 现在我们把它变化到柱坐标下，求这种 Ansatz 下的渐近解[5],[15].

现在设

$$A_0 = 0,\ \mathbf{A} = \hat{\theta}A(r),\ \varphi = f(r)e^{in\theta},\ r^2 = x^2 + y^2 \tag{4.5}$$

则 (4.3) 和 (4.4) 式就简化为

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}f\right) + \left[\left(\frac{n}{r} - eA\right)^2 + (\beta^2 - m^2/\beta)\right]f = 0 \tag{4.6}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA)\right) + \left(Ae^2 - \frac{ne}{r}\right)f^2 = 0 \tag{4.7}$$

当求 $r\to\infty$ 时的渐近解时,我们对单位长度的涡旋线的能量要求有限的条件意味着涡旋场必须具有如下渐近形式的解:

$$f(r)\xrightarrow[r\to\infty]{} (1 - \text{const}\exp[1 - r/\xi]m/\beta^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

$$A(r)\xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{n}{er} + \text{const}\exp[-r/\delta] \tag{4.9}$$

其中 Higgs 标量场的粒子的质量为 $m_s = \sqrt{2}\,m$,而矢量场 A_μ 的质量为 $m_A = m_e/\sqrt{\beta}$. 在标量场 φ^4 自相互作用形式和虚质量情况下，造成了对称性自发破缺,这时,规范粒子——光子"吃掉"它产生的 Goldstone 粒子而同时获得质量. 其相干长度 $\xi = \sqrt{2}/m_s$ 给出了 Higgs 场的空间变化标度. 电磁场的穿透深度 $\delta = \frac{1}{m_A}$ 描述了它的空间变化幅度. 这样便出现如图 10-7 的涡旋线孤立子解.

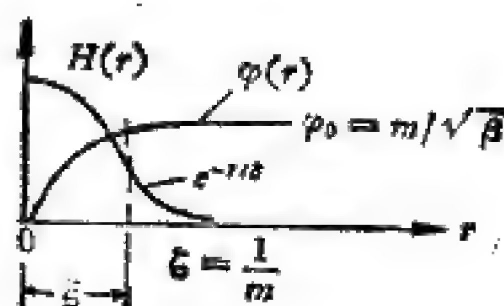


图 10-7 涡旋线的 $\varphi(r)$ 和 $H(r)$.

这里K叫 Ginsbarg-Landau 参数，为

$$K = \delta/\xi = m_s/\sqrt{2}\, m_A = \sqrt{\beta}/e \qquad (4.10)$$

这个无量纲参数把超导体分为两类：当 $K<1/\sqrt{2}$ 为第 I 类超导体，当 $K > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 为第 II 类超导体，只有第 II 类超导体中才出现涡旋. 但对任一个 K，都可能潜伏地存在 Nielsen-Olesen 涡旋解.

关于这种涡旋的性质可参考有关文献[31],[32],[33]，这里我们只讨论涡旋的拓扑性质及能量形式.

对于沿 Z 方向的磁涡旋，我们主要关心 F_{12}. 它可求出通过 (x,y) 平面单位面积的磁通量的大小. 用 $\varphi = |\varphi| e^{i\alpha}$ 对 Higgs 场参数化，则通过闭迴路 P 所围成的面积（如图 10-8）的通量是

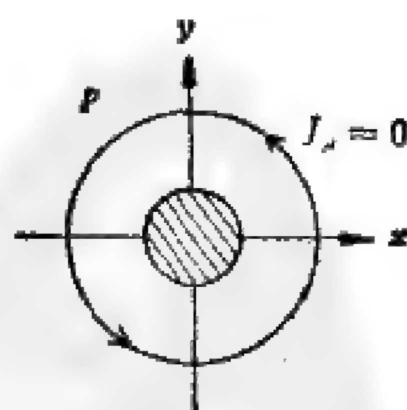


图 10-8 围绕涡旋的环路积分.

$$\varphi = \int F_{12} dx dy = \int_P A_i dx^i = -\frac{1}{e}\int_P \partial_i \alpha dx^i$$

这里运用了沿路径P时，$j_\mu = 0$ 的事实. 由 $\varphi(x)$ 的单值性要求，可得到：

$$\varphi = \frac{1}{e}\left[\partial(2\pi) - \partial(0)\right] = \frac{2\pi}{e} n = n\varphi_0$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots) \qquad (4.11)$$

即磁通量是量子化的. 这个量子化磁通量就是路径P包围的涡旋的总拓扑荷.

为了说明通量的拓扑性质，我们注意到这个理论的真空是由条件

$$|\varphi| = \varphi_0 = \sqrt{\frac{m^2}{2\beta}}$$

所定义的. 由于在这一模型中，我们只要求单位长度的涡旋线的能量是有限的，这意味着复标量场中必须具有渐近形式$\varphi(\theta) = e^{in\theta}\varphi_0$，其中$\theta$是二维中的极角，$n$是整数(是单值性要求). 这就是说，只要把$\varphi$确定到一个相因子 $\alpha = n\theta$. 这表明以α参数化的复φ平面上，存在一个退化真空的圆. 令P是(x, y)平面的一个圆，当沿这个圆移动时，相因子 $\alpha(x, y) = x(\theta)$ 可以从零变到 $2\pi n$. 由此 $x(\theta)$ 给出了一个从(x, y)平面的实圆映象到一个复φ内部空间的圆（见图 10-9). 这个映象 $U(1) \to S^1$. 因此，映象的类表征为

$$\pi_1(U(1)) = Z \text{ (整数集合)} \qquad (4.12)$$

此式表明允许有无限多分立的带有通量 $\varphi = n\varphi_0$ ($n = 0$, ± 1, $\pm 2, \cdots$) 的涡旋存在. 其中标记每一同伦类的整数叫绕数. 它表明相应于(x, y)平面中每转动2π在φ平面中完成的转动次数，涡旋的净通量正比于绕数. 通量不为零的场构成的绕数也不为零. 由于拓扑荷守恒，因此它不能由有绕

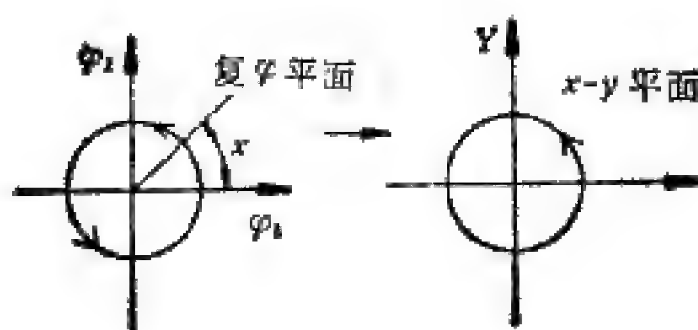


图 10-9 复φ平面到 (x, y) 平面的映象.

数的构型变为没有绕数的构型；即不能连续变形到 $\alpha(\theta)=$ 常数的情况. 如果是这样做，则要求无穷大能量，因此我们在上面求到的涡旋性孤立子解是稳定的. 即涡旋在进行拓扑变化时，其形状不变（非平庸映射）.

至于每一根涡旋线的能量也可以求出. 带有 n 个单位磁通的涡旋，其单位长度的能量[14]为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_n > n\pi m^2\sqrt{2}\,k/\beta \quad (k > 1/\sqrt{2}) \\
\varepsilon_n = n\pi^2 m^2/\beta = n\pi m_A^2/e^2 \quad (k = 1/\sqrt{2}) \\
\varepsilon_n > n\pi m^2/\beta \quad (k > 1/\sqrt{2})
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

对于涡旋线之间的相互作用，当 $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，它们似乎是吸引的，对 $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$，它们是排斥的，对于 $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 则不确定，也可以是无相互作用的. Matricon 等人用数值方法求得 $\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1$（对所有 $k > 1/\sqrt{2}$）. 因此，在第 II 类超导体中，二倍量子化的涡旋在能量上是不利的. 对 $n \geqslant 2$ 单位通量，Bogomolny 用能量泛函的一般分析也得到了同样结论. 一个具有 n 单位磁通的涡旋要分裂成 n 个分离开的拓扑等价构型的单位涡旋$\left(对\ k > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

（二）非 Abel 涡旋性孤立子解. Tze 和 Ezawn[1] 把上

述的 Higgs 模型扩充到非 Abel 情况. 并得出了以下主要的结果.

对一个规范群 G, 若要求具有轴对称的静态涡旋解单位长度的能量有限,这意味着当半径趋于无限大时, Higgs 标量必须是协变常数. 即

$$l_\mu\varphi = (\partial_\mu - iet^a A_\mu)\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{4.14}$$

其中 t^a 是在 φ 空间上作用的群生成元的矩阵表示. A_μ^a 是规范场,它必须属于 G 的伴随表示. 结合这一条件,我们发现在路径 P (在大 r 处) 上任意两点 P_1 和 P_2 处的 φ 场值有如下关系:

$$\varphi(P_2) \doteq s(P_2, P_1)\varphi(P_1) \tag{4.15}$$

其中

$$s(P_2, P_1) = T\exp\left[-ie\int_{P_1}^{P_2} t^a A_\mu^a(x)dx^\mu\right]$$

是一个不可积相因子. T 是沿着路径的矩阵的编时算符. 对于一个由角度 θ 参数化的环形路径, 相因子 $S(\theta)$ 所属的群确定了模型中所允许的涡旋的种类. 例如: 在 Abel 模型中:

$$S(\theta) = e^{in\theta} \in U(1) \tag{4.16}$$

导致 (4.16) 式中结果和具有允许通量 $\varphi_n = \varphi_0 n$ ($n = 0, \pm 1, \cdots$) 的涡旋解.

对于 $G = SU(2)$, 就不同了. 如果用二重态 Higgs 标量破坏规范不变性,则

$$S(\theta) = \exp(2in\theta\tau_3) \in SU(2) \tag{4.17}$$

整体 $SU(2)$ 对称意味着这个理论不能有涡旋解. 因为 $\pi_1(SU(2)) = 0$, 这表明任何简单的涡旋解可以连续地变形到真空. 即无拓扑稳定性. 但用标量三重态来破坏对称性, 便可导致:

$$S(\theta) = \exp(in\theta\tau_z) \in SO(3) \tag{4.18}$$

同伦理论告诉我们

$$\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2 \tag{4.19}$$

即这个理论可以有 0 或 ± 1 通量单位的解. 不可能有别的涡旋了. 这表明 Abel 理论和非 Abel 理论是有区别的，后者只有有限种涡旋解.

第五节　三维磁单极解

磁单极就是只有一个磁极的最小微观磁体元，这个概念首先是 Dirac 于 1931 年引入的. 现在我们来看这一概念是怎样出现的.

在量子理论中的波函数 $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ 乘一个相因子 e^{ir} 即得另一个波函数 $\psi = e^{ir}\phi$. 如果相因子 r 是 (x_1, x_2, x_3, t) 的函数，即

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = e^{ir(x_1, x_2, x_3, t)} \cdot \phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

则有:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = e^{ir}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\Pi_i\right)\phi \quad \left(\Pi_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)(i = 1, 2, 3)$$

因此，当 r 与 (x_1, x_2, x_3, t) 有函数关系时，则算符有如下变换关系，即

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x_i} + i\Pi_i.$$

这和电子在电磁场 A 中的动量算符的变化关系

$$\hat{P}_i \to \hat{P}_i + eA_i \text{ 或 } \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x_i} + ieA_i$$

很相似. 如果有 $\Pi_i = eA_i$，则这种变化关系就完全相同. 这意味着引入不可积相因子 $r(x_1, x_2, x_3, t)$ 和引入电磁势 A

一样．当我们绕闭合回路一周时，相位 r 的总变化常表成：

$$(\triangle r)_{回路}+2\pi n=\oint_{回路}\Pi_i dx_i$$

$$=e\oint A_i dx_i$$

$$=e\iint_{回路的曲面}\mathscr{H}\cdot dS\quad(\mathscr{H}=\nabla\times\boldsymbol{A})$$

n 是整数．$\iint\mathscr{H}\cdot dS$ 就是通过回路曲面的磁通量，它和绕回路一周时相位的变化密切相关．

现在我们考虑 ϕ 为零的区域．如果 $\phi=0$，则 r 完全是不确定的，如果 ϕ 接近于零，则 ϕ 的一个很小变化就可以对应于 r 的十分明显的变化． 沿着一条线通常满足这两个条件，则我们把这条线叫做节线．在 $\phi=0$ 的地方，可以有几条节线．假设有一些波函数，它们含有一条节线，并且这条节线只有一个端点，这时，节线的端点便是场的某种奇点．如果我们取包围这奇点的一个闭曲面(此时 $(\triangle r)_{回路}=0$)，则用 e 乘以穿过这个闭曲面的总磁通量就等于 $2\pi n$，即：

$$e\oiint\mathscr{H}\cdot dS=2\pi n$$

如果穿过一个闭曲面的磁通量不为零，这就意味着该闭曲面里面有某一个磁单极存在．若用 q_m 来表示它的强度，则有 $\oiint\mathscr{H}\cdot dS=4\pi q_m$．这和静电学中的 Gauss 定理相似，可称为磁学中的 Gauss 定理． 它表明穿过包围磁单极的任一闭曲面的磁通量等于被包围的磁单极强度 q_m 的 4π 倍．其中，$q_m=\frac{n}{2}e$，它表明了粒子电荷和磁单极子强度紧密相关．因此，如果某处存在一个磁单极子，那么自然界所有的带电粒子的电荷就必须是量子化．另外，如果在量子理论中有磁单极出

现，则从量子力学的考虑中能够十分确定地得出这个表达式，而且是不可避免的. 同时，如果磁单极存在，Maxwell 电磁方程组就可以表成对称的形式. 在 Dirac 提出磁单极后，人们从理论和实验上作了大量的工作，他们从自然界中，或实验室中去找到它的存在. 最近，美国斯坦福大学的 Blas, Cabrera 精确地测定了超导铌线圈中的磁通量的变化，通过 151 天的观察，在一次观察中测得磁通量突然增高，它恰好为一个磁单极引起的磁通量，从而声称他观察到磁单极的存在.

应当指出 Dirac 的磁单极子必须附上一条讨厌的节线或奇异的弦，这是不自然的. 1974 年苏联的 A. M. Palyakov 和荷兰的 G. 't.Hooft 指出磁单极的质量超过质子质量的五千倍（现在的电磁、弱、强作用的大统一理论中，认为磁单极的质量为质子质量的 10^{16} 倍）. 同时又指出如果将 Dirac 电磁 $U(1)$ 规范群"嵌入"到非 Abel 紧致规范群中，则这理论中的磁单极子可以不带有奇异弦，并且它也是非线性偏微分方程的一种孤立子解. 下面我们来研究它.

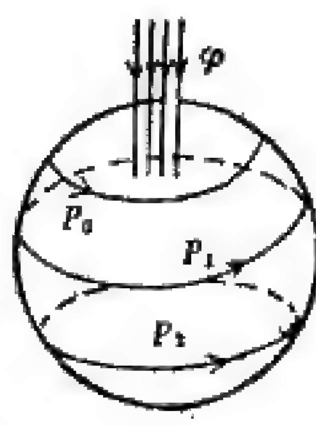


图 10-10　紧致电动力学的 G. 't. Hooft 结构.

让我们来考虑如图 10-10 所示的紧致电动力学的 G. 't Hooft 结构，其中，Φ 是进入球内空间的磁通量，P_0 是围绕磁力线的一个路径，沿着 P_0 的势必须是纯规范的. 由于这一情况以及所有电荷场应是单值的，则有

$$\Phi = \oint P_0 A_i dx^i = \frac{2\pi n}{e}$$

对于一个 Abel 理论，通量必须全部流出球，因此，外围线 P_0 不可能连续地移动到一个常数 ($P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to$ 南极). 这就是说在一个 Abel 磁单极情况下，要求一个 Dirac 弦. 另一方面，如果电磁 $U(1)$ 规范群放入一个非 Abel 紧致群中，则磁单极可以不需要附上奇异弦. 例如，在 $SO(3)$ 规范理论中，一个 4π 的转动，可以变为在南极的常数，因为规范变换中的自由度增加了. 因此在这样的理论中，可以有磁荷为 $q_m = \frac{n}{2e}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \cdots$)的无弦磁单极存在. 为了实现这一想法，G. 't. Hooft 等人考查以下的具有 $SO(3)$ 规范不变的拉氏函数 $\mathscr{L}$：

$$\begin{cases} \mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \varphi^a D^\mu \varphi^a \\ \qquad - \frac{\beta}{4} (\varphi^a \varphi^a - m^2/\beta)^2 \\ F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + e\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \\ D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e\varepsilon^{abc} A^b_\mu \varphi^c \quad (a = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{5.1}$$

它描述了规范场 A_μ 和 Higgs 同位旋矢量场 φ^μ 的相互作用. 同时它是 $SO(3)$ 规范不变的. 即它是弱-电磁作用的 Goorgi-Glashow 模型. 它描述了一个无质量光子和二个重的带电的中间矢量玻色子. 后者从 Higgs 机制得到质量. 这样由于简并真空 $\varphi_0^2 = m^2/\beta$ 的存在引起 $SO(3)$ 规范对称性的自发破缺. 在此情况下，只留下 $U(1)$ 规范对称性保持不变.

通过 $E-L$ 方程，由 (5.1) 式得到经典运动方程为:

$$\begin{cases} D^\mu F^a_{\mu\nu} = -e\varepsilon^{abc} \varphi^b D_\nu \varphi^c \\ D^\mu D_\mu \varphi^a = -\beta \varphi^2 (\varphi^a - m^2/\beta) \end{cases} \tag{5.2}$$

G. 't. Hooft 和 Polyakov 求出了这个方程有一个磁单极解．对此它作一个静止的球对称假设：

$$\begin{cases} A_0^a = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{aij}x_j[1 - K(r)]er^2 \\ \varphi^a = -x_a H(r)/er^2, r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \tag{5.3}$$

把 (5.2) 式简化为联立的径向方程，即：

$$\begin{cases} r^2K'' = K(K^2 - 1) + KH^2 \\ r^2H'' = 2HK^2 + \beta/e^2(H^3 - c^2r^2H)(c = M_c/\beta^{1/2}) \end{cases} \tag{5.4}$$

对于 $K = 0$, $H = cr$ 的精确解，因它对应于无限大的能量，我们不感兴趣，不去管它．对于一个沿半径指向外的有相同渐近行为的解，它在原点接近于一个纯规范 ($F^a_{\mu\nu} = 0$)($K(0) = \pm 1$) 是有特别意义的．如图 (10-11) 所示．这个解就称为磁单极．一个磁单极的能量或质量可用数值计算法得出．最后可得：

$$M = 4\pi \frac{m}{e\beta} f(\beta/e^2) = \frac{M_\omega}{\alpha} f(\beta/e^2)$$

其中，$\alpha = e^2/4\pi$，f 是一个缓变单调上升的函数．$f(0) = 1$，且 M_ω 是矢量玻色子的质量．因为 $1/\alpha = 137$，可估计 $M_\omega \sim 50\text{GeV}$，可见磁单极的质量很大．

在 3-D 空间中，拓扑不变量是磁荷．为了说明孤立子解拓扑的非平庸性或稳定性，G. 't. Hooft 构造了一个规范不变的电磁场张量：

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \hat{\varphi}^a F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a D_\mu \hat{\varphi}^b D_\nu \hat{\varphi}^c \\ \hat{\varphi}^a = \varphi^a/|\varphi| \end{cases} \tag{5.5}$$

也可写成：

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a \partial_\mu \hat{\varphi}^b \partial_\nu \hat{\varphi}^c \\ B_\mu = \hat{\varphi}^a A^a_\mu \end{cases} \tag{5.6}$$

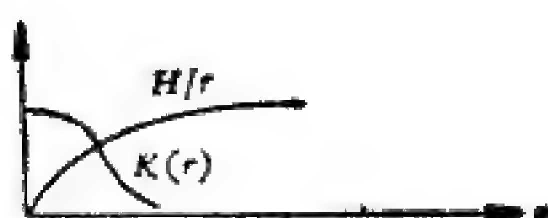


图 10-11 磁单极解形式

将 (5.3) 式代入到 (5.6) 式，可得到：

$$F_{ij}=\varepsilon_{ijk}\chi_k/er^3 \tag{5.7}$$

从拓扑意义上讲[16]，它至少相应于一个磁荷为 $q_m=\dfrac{1}{2e}$ 的点磁单极子的磁场. 若我们改变 (5.3) 式的符号，就可得到反磁单极子[15]. 现在来看这个荷的拓扑来源.

如果 B_μ 中没有弦奇异性存在，则这时引起的磁流恰是：

$$^*j_\mu=\partial^\nu{}^*F_{\mu\nu}=\frac{1}{2e}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{abc}\partial^\nu(\hat\varphi^a\partial^\alpha\hat\varphi^b\partial^\beta\hat\varphi^c)$$

可以证明它是守恒的. 即 $\partial^*_\mu j_\mu=0$. 但是这个拓扑流不是一个 Noether 流. 与它相联系的荷不能生成一个 Lagrange 量的对称. 磁通或磁荷是：

$$\begin{aligned}\Phi&=4\pi q_m\\&=\int d^3x{}^*j_0=\frac{1}{2e}\oint_{s_k^2}\varepsilon_{ijk}\hat\varphi^a\partial_j\hat\varphi^b\partial_k\hat\varphi^c(d^2\sigma)_i\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中，s_k^2 是一个半径为 R 的球（在极限下 $R\to\infty$）. 因为一个球可以用两个参数座标 $\xi_\alpha(\alpha=1,2)$ 来表示. 上式可写成：

$$\begin{cases}4\pi q_m=\dfrac{1}{e}\displaystyle\int_{s_k^2}d^2\xi\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{abc}\hat\varphi^a\partial_\alpha\hat\varphi^b\partial_\beta\hat\varphi^c=\frac{1}{e}\int d^2\xi\sqrt{g}\\ g=\det(\partial_\alpha\hat\varphi^a\partial_\beta\hat\varphi^a)\end{cases} \tag{5.9}$$

我们知道，这个积分是映射 $s_k^2\to s_\varphi^2$ 的 Kronecker 指标的 4π

倍．Kronecker 指标必定是一个整数，则我们可得：

$$q_m = n/2e$$

磁单极孤立子的出现带来了以下几个结果：

(1) 可以通过 Julia 和 Zee 自洽的假设：$A_0^a = \chi_a J(r)/er^2$ 引入一个电场，就可出现双子 (*dyon*) 解[17]． 这个双子具有有限的能量和连续的电荷和磁荷 $q_m = \frac{1}{2e}$．在量子理论中，电荷允许值变成分立的：$q = ne$．[18]

(2) 这一理论可扩充到高秩规范群，如 $SU(3)$．这时可构成具有多种不同荷的新磁单极子．

(3) 在极限 $\beta \to 0$ 时(保持条件 $H(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} Cr$)．Prasad 和 Sonmerfield[19]得到(5.4)式的严格解为：

$$K(r) = Cr/\mathrm{sh}(Cr), \quad H(r) = (Cr)_{\mathrm{coth}}(Cr) - 1$$

(4) Hasenfratz 和 G. 't. Hooft 及 Jackiw 和 Rebbi[21]指出，如果利用 $SU(2)$ 把同位旋二重态的 Lorentz 标量加到单极模型中，就有一个磁单极加上同位旋量的态，它的角动量为 $\frac{1}{2}$．这个复合系统显然同样服从 Dirac-Fermi 统计．因此，自旋是从同位旋而来的．

(5) 既然原始的 $SU(2)$ 模型有 $q_m = \frac{1}{2e}$ 的磁单极存在，它是否存在带有多磁荷的有限能量解呢？现在认为对适当定义的"球对称"，不存在 $|q_m| > \frac{1}{2e}$ 的 $SU(2)$ 球对称磁单极．对 $SU(3)$ 存在着多磁荷的球对称单极子[22]．

(6) 在 3*D* 中不能构成一个拓扑稳定的没有长程场（由于 Higgs 机制变得相当重的所有规范场）的静态有限能量解．因为在三度空间中一个无限位垒需要长程规范场，这无限位垒用来提供拓扑稳定性，阻止孤立子衰变为普通真空[63]．

第六节　四维空间的拓扑性孤立子——瞬子

现在我们来研究四维欧氏空间的拓扑性孤立子解．这个问题首先由 Belavin, Polyakov, Schwarz 和 Tyupkin（BPST）进行了研究．他们求出了在四维实空间中，在 $SU(2)$ 下的非 Abel 规范场方程的无源解． 这个解被称为瞬子．在这种情况下，其规范势在全欧氏空间是解析的，但场强存在于时空局部区域．欧氏能量、动量为零．在下面我们简单地叙述 BPST 等人的工作．其详细推导请参见有关原文．

在 $4D$ 中规范场拉氏函数密度，BPST 表示成：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\ (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{6.1}$$

其中，

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu (C^{abc} = \text{结构常数}).$$

现在我们考虑规范群 $SU(2)$，并利用矩阵表示：

$$A_\mu = A^a_\mu \tau^a/2, \quad F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\tau^2/2$$

其中：τ^a 是 2×2 polly 矩阵．在移动这些量时，我们利用了以下的关系式：

$$\begin{cases}[\tau^a, \tau^b] = 2i\varepsilon^{abc}\tau^c, \quad Tr\tau^a\tau^b = 2\delta^{ab} \\ Tr\tau^a\tau^b\tau^c = 2i\varepsilon^{abc}\ (Tr = \text{求迹})\end{cases} \tag{6.2}$$

利用 (6.1) 式，由 $E\text{-}L$ 方程，我们可得到场方程为：

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} - ig[A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{6.3}$$

我们可以看到，在这一理论中，只存在一个拓扑不变量，即 Pontryagin 指标，或第二类陈氏数．它相应于：$\pi_3(SU(2)) = Z$．在这种情况下的拓扑荷 Q 我们定义为：

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2}\int dx^4 Tr(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) = n \tag{6.4}$$

其中，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 而$Q=n$是 $SU(2)$ 在拓扑映象下被覆盖的次数，记为 $g(x)$ 的同伦类，$g(x)$ 则是规范群的矩阵. 这个拓扑荷在 $A_0=0$ 的规范中，简单地就等于在 $t=-\infty$ 和 $t=\infty$ 之间的绕数的变化.

对于这样的物理系统，我们还要引进一个不等式

$$\int d^4xTr\left(F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)^2\geqslant 0 \qquad (6.4)'$$

这个条件等价于给赝能量E加一个限制，即:

$$E=\frac{1}{2}\int d^4xTr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\geqslant 8\pi^2|Q| \qquad (6.5)$$

其中，Q是可以进一步简化的. 如果 A_μ 没有奇异性，即

$$\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda=\partial_\nu\partial_\mu A_\lambda,$$

则有

$$Tr\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}Tr \cdot\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta+\frac{2g}{3i}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)\Big) \qquad (6.6)$$

这里在 (6.6) 式的右端是规范无关的. 但

$$2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}Tr\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta+\frac{2g}{3i}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

是规范有关的. 如果(6.3) 式是可积的，并令 $g=1$，则Q又可表示为

$$Q=\frac{1}{16\pi^2}\oint_{s^3}\left[2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}Tr\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta+\frac{2g}{3i}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)\right]d^3\sigma^\mu \qquad (6.7)$$

为了使 $F_{\mu\nu}$ 渐近于零，我们要求 A_μ 当其 $r\to\infty$ 时是一个纯规范，即

$$A_\mu(x)=ig^{-1}(x)\partial_\mu g(x),\quad x\in s^3 \qquad (6.8)$$

(6.5) 式所给的 E 的限制表示：具有不平凡荷的孤立子解所具有的能量有一个下限．如果有

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{6.9}$$

关系存在，则我们应取 (6.5) 式中能量的下限．当这个条件成立时，场方程自动满足．因为：

$$D_\mu F_{\mu\nu}=D_\mu\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)=0$$

（对于无奇异弦的场是一个恒等式）．

利用规范场的球对称假设，我们可写成：

$$\begin{cases} A=if(r)g^{-1}(x)\partial_\mu g(x), \quad \gamma^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \\ g(x)=\dfrac{x_4-ix_a\tau^a}{r} \end{cases} \tag{6.10}$$

把它代入 (6.9) 式经过整理，我们发现满足自对偶条件

$$rf'\mp 2f(1-f) \tag{6.11}$$

求解这个方程式，我们可得到一个不平凡解．

$$f(r)=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2} \tag{6.12}$$

这个解称为瞬子，其中，β 是一个有长度量纲的任意标度，即瞬子的大小，这个瞬子可以定域在任何地方，并具有任何体积尺度．由这个解和 (6.10) 式可求得：

$$\begin{cases} A_\mu=\dfrac{i\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2}g^{-1}\partial_\mu g \\ F_{\mu\nu}=\dfrac{4\beta^2}{(\gamma^2+\beta^2)^2}\sigma_{\mu\nu} \end{cases} \tag{6.13}$$

其中，

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{4i}[\tau^i,\tau^j], \qquad \sigma_{i4}=\frac{1}{2}\tau^i=-\sigma_{4i}$$

对于这个瞬子的 Pontryagin 指标 $Q=1$，由于当 $\gamma\to$

∞ 时，$F_{\mu\nu} \to 0$，且 A_μ 接近于一个纯规范. 在 (6.13) 式中作一个平移变换：$x_\mu \to x_\mu - a_\mu$， 也可以得到另一个瞬子解，其位置在 $x_\mu = a_\mu$ 处. 同样也存在一个反瞬子解，它就是把 (6.13) 式中的第一式的 g 换成 g^+ 后得到的. 这个解满足[24]：

$$F_{\mu\nu} = -\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = \frac{4\beta^2}{(\gamma^2 + \beta^2)^2}\bar{\sigma}_{\mu\nu}$$

其中

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{i4} = -\sigma_{i4}$$

它所对应的拓扑荷 $Q = -1$. 对于

$$F_{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

和 $|Q| = 1$，除了上述的规范变换外，大概是没有其它的解了. 对于单一的瞬子常用 5 个参数来表示. 其中 4 个确定它的位置，1 个决定它大小.

应当指出：瞬子并非物理粒子. 它是四维欧氏空间（虚时间）而非四维物理空间中场方程的解. 即瞬子过程系在虚时间内进行(很类似于量子力学中的隧道效应). 它可认为是在虚时间内把 $\Delta n = 1$ 的两个经典真空的规范势连接起来的经典解(或路径)，即可表成：

$$|i\rangle \underset{\text{瞬子}}{\overset{\text{反瞬子}}{\rightleftarrows}} |i+1\rangle$$

故名为瞬子. 其瞬子之间是没有相互作用的，在计及量子起伏时，瞬子与反瞬子之间的相互作用才存在. 虽然这样，但它在欧氏空间中的许多性质很象粒子. 具有可观察的物理效应. 例如瞬子隧道效应可以在物理上引起可观察到的效应. 这些效应借助在自然真空中的微扰方法也可以加以说明. 正是这样，所以人们又把它称为赝粒子. 另外，瞬子与强相互作

用理论（QCD）关系密切，所以瞬子物理是当前规范理论中研究的重要课题之一。

最近有人还指出：基于规范场强 $F_{\mu\nu}$ 和 Reimann 空间的度规张量 $R_{\mu\nu\lambda}$ 的相似性，在广义相对论中也引入了瞬子的概念，称为引力瞬子。引力瞬子的重要性在于它们是在真空的 Minkowski 空间中的不同真空（$R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$）之间插入的。很可能在所谓超规范理论中还存在着超引力瞬子。

第七节　非拓扑性孤立子

对于非拓扑性孤立子，它是不同于拓扑性孤立子的，其根本区别在于它不需要有简并真空的存在。它在无穷远处的边界条件和场方程无孤立子解是一样的，同时它还必须要求有如“电荷”一类的加法守恒律和一个标量场的存在。因此要产生一个非拓扑性孤立子的最简单方法是引进一个复数场[20]

$$\varphi=\varphi_1+i\varphi_2,\quad \varphi=\varphi_1-i\varphi_2 \tag{7.1}$$

其中，φ_1 和 φ_2 都是 Ermi 场。这里我们仅讨论一维空间的情况。其相应的拉氏密度可表成

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}-U(\varphi^*\varphi) \tag{7.2}$$

用 E-L 方程，由(7.2)式可得到运动方程为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}-\varphi\frac{\partial}{\partial(\varphi^*\varphi)}U(\varphi^*\varphi)=0 \tag{7.3}$$

利用上式，我们可直接证明：

$$N=i\int(\varphi^*\dot{\varphi}-\dot{\varphi}^*\varphi)dx \tag{7.4}$$

是一个守恒量(只要假设：在 $x=\pm\infty$ 时，$\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\varphi$ 等于零即可)。

在这系统中，之所以会有这样的守恒量存在，是由于在 $\varphi \to \varphi e^{i\theta}$ 的变化下，$\mathscr{L}$ 是不变的．则 Hamiton 函数 $\mathscr{H}$ 这时也不会改变．因此 $\mathscr{H}$ 与 θ 无关．为此我们可取 N 为 θ 的共轭动量．由 Hamilton 方程，我们可得：$\dot{N} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \theta} = 0$，所以 N 是一个守恒量．在经典场论中，N 可为任何实数．因为 θ 是一个相变量．当 $\theta \to \theta + 2\pi$ 时，$\varphi \to \varphi$．故在量子场论中，N 象角动量一样，必为整数．(以上推理也可以反用，即如果 N 是一个守恒量，则 $\mathscr{H}$ 必与其共轭坐标无关．在量子场论中，如 N 为整数，则 θ 必为一个循环变数，故可取 θ 为相变量．这就解释了我们在开始时为什么要引进复数场的原因)．

当 $N \neq 0$ 时，则 φ 一定与时间有关．很容易证明，当我们固定 N 后，则最小的能量解与时间的关系应服从谐振子的关系：

$$\varphi = \sigma(x) e^{-i\omega t} \tag{7.5}$$

将 (7.5) 式中的 φ 代入 (7.3) 式可得

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \omega^2\sigma - \sigma \frac{d}{d\sigma^2} U = 0$$

对上式积分后得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 - V(\sigma) = 常数 \tag{7.6}$$

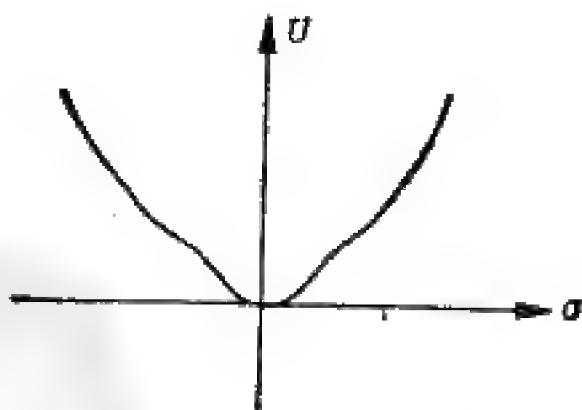


图 10-12 势能曲线．

其中

$$V = \frac{1}{2}(U - \omega^2\sigma^2), \quad U = U(\sigma^2)$$

由于非拓扑性孤立子不需要真空简并，故可取 $U(0) = 0$. 这时 U 可取如图 10-12 所示的形式.

为了得到非拓扑性孤立子解，我们设

$$V = \frac{1}{2}(U - \omega^2\sigma^2)$$

具有如图 10-13 所示的形式. 即有

$$U(\varphi^*\varphi) - \omega^2\varphi^*\varphi = 0$$

它除了有 $\varphi = 0$ 的解外，还有 $\varphi \neq 0$ 的解存在.

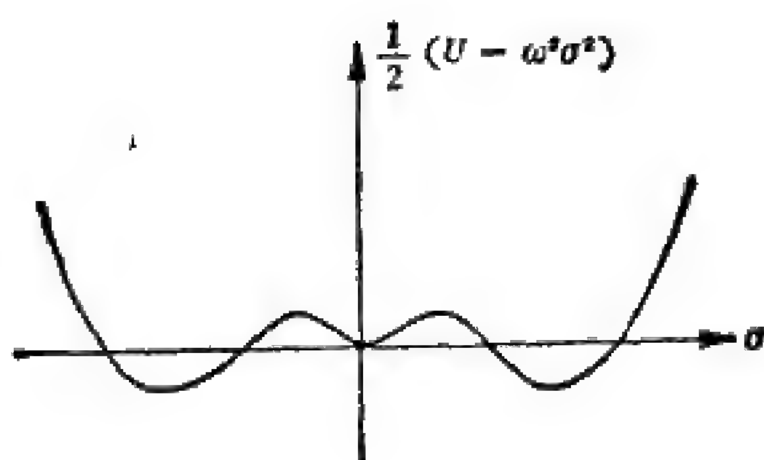


图 10-13 $\frac{1}{2}(U - \omega^2\sigma^2)$ 曲线.

在非相对论性的力学模拟情况下，质点的势能应为 $-V$. 其形式如图 10-14 所示，当 $x = -\infty$ 时，放在 O 点处的质点，我们若轻轻地推它一下，它将沿着曲线滚到 A 点，然后由 A 点倒退回来. 在 $x = +\infty$ 时，它又滚回到了 O 点. 这种运动规律是容易求得的. 由 (7.6) 式可得通解为:

$$x - x_0 = \int_A^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{2V(\sigma)}} \qquad (\sigma = A \text{ 时}, x = x_0) \quad (7.7)$$

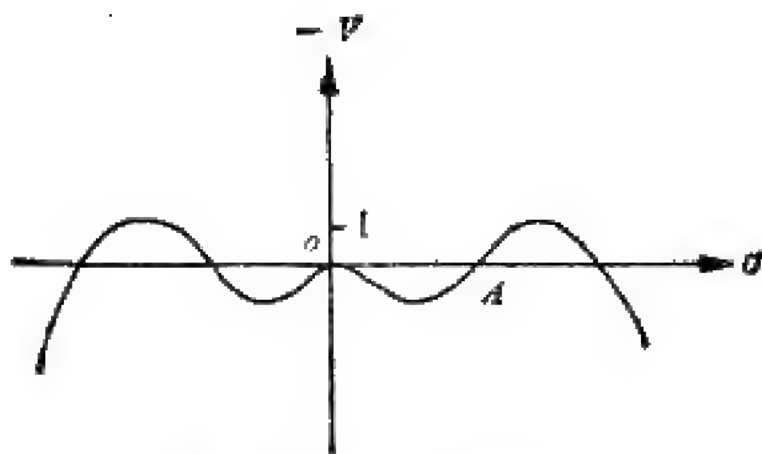


图 10-14 $V(\sigma)$ 的形式.

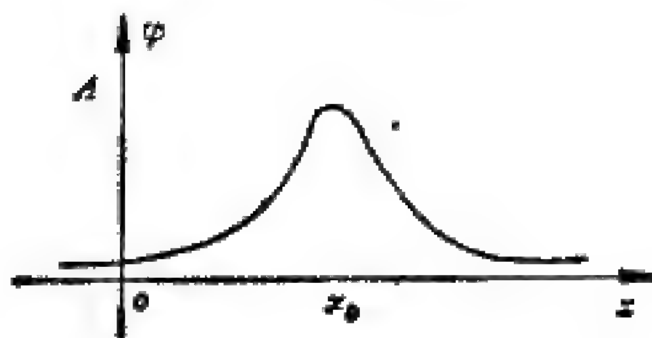


图 10-15 孤立子解 $\varphi(x)$.

显然在此情况下，其场的能量约束在空间的有限区域中而不弥散，因此它是孤立子．由于在 $x = \pm\infty$ 时，解趋于零，因而它是一个非拓扑性的孤立子，其解的形式如图 10-15 所示．

我们从图 10-12 可看到，当 $\sigma \to 0$ 时，$U \to m^2\sigma^2$． 其中 m^2 为常数．但如果我们取 V 为图 10-14 所示的形式，则我们可证明必有

$$\omega < m \tag{7.8}$$

现在如果我们取：

$$U = \frac{m^2\varphi^*\varphi}{1 + \varepsilon^2}[(1 - g^2\varphi^*\varphi)^2 + \varepsilon^2]$$

则这时由运动方程可得到解为：

$$\varphi = \frac{1}{g}\left[\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a\cosh y}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} \tag{7.9}$$

其中，

$$a = (1 + \varepsilon^2)(m^2 - \omega^2)/m^2, \quad y = 2\sqrt{m^2 - \omega^2}(x - x_0)$$

在 (7.9) 式中，当我们令：$|x| \to \infty$ 时，便可得到这个解的渐近形式为：

$$\varphi \propto \frac{1}{g}\sqrt{m^2 - \omega^2}\, e^{-\sqrt{m^2-\omega^2}|x|} \tag{7.10}$$

这是一个衰减的解．在 $|x| \to \infty$ 时，它将衰减到零．符合非拓扑性孤立子的定义．因此，(7.10) 式所具有的渐近形式具有普遍性．我们也可从其它方面来严格加以证明的．

下面我们来说明这种孤立子的稳定性．

对于这种孤立子的稳定性完全由在同一守恒量下它的能量与平面波解的能量相比较来决定的，首先讨论一维情况．

我们知道任何非线性场方程都具有形如

$$\varphi = \sqrt{\frac{N}{2\omega\Omega}}\, e^{iK\cdot x - i\omega t} \qquad (\omega = \sqrt{m^2 + K^2}) \tag{7.11}$$

的平面波解．这是因为当系统的体积 $\Omega \to \infty$ 时，上式的振幅变成无穷小，因此可忽略拉氏函数中场的高次项．在保留一次项下，并可得到此解．对于这样的平面波解的能量与守恒量（如 N）之间有如下的直线关系，即：

$$E_{plan} = N\omega \geqslant Nm \tag{7.12}$$

对于孤立子解来讲，能量是 N 的非线性函数，由 (7.8) 式可知，$\omega < m$．因此，非拓扑性孤立子解可以认为是平面波的解析延拓，即从 $\omega \geqslant m$ 延拓到 $\omega < m$ 的结果．对于任何守恒量 N 和任何耦合常数 g，非拓扑性孤立子解中所对应的最低能量 $E_{soliton}$ 为

$$E_{soliton} < Nm \tag{7.13}$$

由前面可知守恒量 N 和复数场的相角 $\theta = \omega t$ 是互为共轭变量的，则我们有：$\dot{N} = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial \theta}$ 和 $\dot{\theta} = \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial N}$ 的关系存

在. 由 $\dot{\theta}=\omega$ 及在任何解上 $\mathscr{H}$ 的本征值是能量 E，因此上式可写成:

$$\omega=\frac{dE}{dN} \tag{7.14}$$

对于平面波，ω 与 N 无关，即得 $E=N\omega$. 但对于非拓扑性孤立子就没有这关系了，因为应考虑 ω 与 N 的关系. 若我们考虑 $\omega\to m^-$ 的极限情况，由 (7.10) 式可知，当 $\omega\to m^-$ 时，有

$$N\to 2m\int|\varphi|^2dx\sim\sqrt{m^2-\omega^2}\to 0$$

由 (7.14) 式的积分，并因 $\omega<m$，则有:

$$E_{soliton}=\int_0^N\omega dN<m\int_0^N dN=mN \tag{7.15}$$

由此得到 $E_{soliton}<E_{plan}$. 即在一维空间中，如果存在非拓扑性孤立子解，则对任何守恒量 N，最低能量态不是平面波，而是孤立子. 同时，这个孤立子解永远是稳定的. 对于二维情况，也可以加以证明，并得到在一定条件下，孤立子是能量最低态，而且是稳定的.

以上是在一维空间中所求得的静态孤立子解. 若要把它推广到 (3+1) 维中去时，由于 Derrick 定理，纯标量场没有静态孤立子解存在，但是如果非线性标量场有一个内部对称群 G 存在时，则可能存在形如 $\{e^{i\alpha_i(t)T_i}\}\varphi_c(x)$ 的孤立子解. 其中 T_i 为群 G 在标量场 φ 所属的表示中的生成元，$\alpha_i(t)$ 是依赖于时间 t 的群参数. G 为 Abel 群的情况下，曾由李政道等人研究过[25]-[27]. 当 G 为非 Abel 群的情况下，周光召等人[28]以 $G=SU(2)$ 同位旋群的情况为例，研究了具有非 Abel 内部对称性的标量场的孤立子. 并证明了，只有 $\varphi_c(x)$ 的 $I_3=\pm I_{3\max}$ 分量不为零的非拓扑性孤立子是稳定的.

第八节　孤立子的量子化

在当前的场论研究中，人们常将某些非线性方程作为定域量子场方程的经典近似方程，求出它的孤立子解，然后再量子化．量子化后的孤立子，更好地体现了它的粒子性，即波-粒二象性．这对于研究孤立子的性质和它们之间（或它与其它粒子）的相互作用情况很有好处．但是这里就出现两个问题：非线性场方程的孤立子能不能量子化？如果能，又如何进行量子化？从当前来看，这些问题既是一个复杂的问题，也是一个没有解决的问题．所发表的文章不少，在这里我们仅简单地介绍这方面的问题．

我们都知道第一章介绍的几类方程如 SG 和 φ^4 场方程都有孤立子解，它称为经典孤立子．所谓量子化就是针对它而言．它们能否量子化呢？首先看以下事实．

在任何场论中，我们考虑的系统有很多不同的场，我们综合地用 φ 来表示它们．这些场与场之间可有很多不同的耦合常数．为简单起见，可用下式定义一个作为总体的耦合常数 g，若我们用（3.1）式的拉氏函数，则在经典场论中的经典孤立子解可表成：

$$\varphi_{经典}=\frac{1}{g}\sigma$$

则

$$\mathscr{L}=\frac{1}{g^2}\mathscr{L}_\sigma$$

其中

$$\mathscr{L}_\sigma=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right)^2-V(\sigma)$$

$\mathscr{L}_\sigma$ 与 g 无关. 因为经典解由作用量积分的极值所决定，而作用量与 $\int \mathscr{L}_\sigma d^4x$ 成正比，因此 $\mathscr{L}_\sigma$ 与 g 无关，意味着相应的孤立子解 σ 也必与 g 无关.

在量子化理论中的作用量等于 $\hbar^{-1}$ 乘上经典作用量，而后者线性地依赖于 $\mathscr{L}$ 即 $g^{-1}\mathscr{L}_\sigma$. 于是我们可期待 g^2 起着一种类似 $\hbar$ 的作用，我们可以这样来理解：如果在广义坐标空间中有两个点 A 和 B，考虑两条不同的路径，每一个路径有个相：

$$\frac{1}{\hbar}\int \mathscr{L} d^4x = \frac{1}{\hbar g^2}\int \mathscr{L}_\sigma d^4x$$

把所有不同路径的

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar g^2}\int \mathscr{L}_\sigma d^4x\right)$$

加起来，即为量子力学中幅度. 因此 $g^2\to 0$ 和 $\hbar\to 0$ 有异曲同工之妙，它们都分别地将量子力学的解过渡到经典力学的解. 所以一旦有经典玻色子场孤立子解存在，那末可证明至少在弱耦合的场合下总有一个相应的量子孤立子解存在. 如果我们把量子孤立子解用 g^2 的幂来展开，那么用 g^2 的幂展开形式与用 $\hbar$ 为幂的展开形式极为相似，首项全同于 WKB 近似. 因此如果我们把量子孤立子解的能量 E 用 g^2 的幂展开，即

$$E_{量子} = O\left(\frac{1}{g^2}\right) + O(1) + O(g^2) + \cdots \qquad (8.1)$$

式中第一项就是经典解的能量 $E_{经典}$，因为 $\varphi_{经典}\propto\frac{1}{g}$，所以它是 $O\left(\frac{1}{g^2}\right)$. 如果是可重整化的场论，那么后面的项 $O(1)$，$O(g^2)$ 可以证明是有限大的（主要的理由是因为 $\varphi_{经典}$ 在空间 x_μ 无

奇异点).

这段论述表明，一个场或一个系统是否有量子化的孤立子解存在，只要研究这个场或系统有无经典孤立子解就可以了．为此，李政道等人认为：在一个能重整化的玻色场中，对每一个经典孤立子解，都存在相应的一个量子化的解．当耦合常数 $g \to 0$ 时，它的质量趋近于经典孤立子的质量，同时它还有一个形状因子．所谓能重整化即是在具有无穷大的粒子的相互作用矩阵元 S 中的参数，如电荷、质量等，用它的物理值(实验值)代替和引入重正化因子后，则 S 能收敛．对于自旋为零的场，当它们之间的相互作用的拉氏量或 Hamilton 量，不超过场量 φ 的四次方时，量子电动力学证明了它是可重整化的．对于这样的场存在着量子化的孤立子解，它的形状因子是可测量的，其形状恰好象经典孤立子的形状．当然，对 Fermi 场也可以作类似的定义．

那么又如何量子化一个经典孤立子呢？我们都知道，对于一般的束缚态，在 $\hbar \to 0$ 时，解是不存在的．但是在量子化束缚态中，E 如前面所论述的那样，当 $\hbar \to 0$ 时，解是存在的．同时，由于孤立子解与非线性场有关，则往常的微扰展开法，对它也不适合了．因为当耦合常数 g 很小时，场量 φ 可能很大．然而对于一般的孤立子系统如非线性 Schrödinger 方程、SG 方程和 φ^4 场方程等，都是一个完全可积的正则系统．它们中的每一个孤立子都具有确定的能量、动量、电荷、质量等基本物质特性．因此，使用常用的正则量子化方法进行量子化是很恰当的[24]-[26],[29]-[31]．当然当前也有采用路径积分的方法的．在下面只是简单地介绍一下李政道等人[24]-[26],[29] 提出的量子展开方法．其详细情况和其它方法[32],[33]，读者可查看有关原文．

这种量子化方法是将其量子解向经典解展开，其展开系

数就是粒子的产生算符和消灭算符．它们应满足所应满足的对易关系．在这种孤立子解的量子展开中，我们主要是求相应的经典孤立子解，然后去决定其展开的方式，而不会花气力去求其对易关系．对于经典孤立子解，由前几章的研究表明，对于一个非线性的扩散型系统总是存在一个经典孤立子解．如果是这样，则与时间有关的多孤立子或反孤立子解通过在 $t=-\infty$ 时的适当的渐近状态的形式总是可以建立起来的．根据量子解的定义，我们便可以用这个经典解为基础来对我们所要求的量子解对小参量 g 作量子展开．可以看到，在这展开中的最低阶项$\left(\text{即 } O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right)$就是经典解．下面我们以(1+1)维的孤立子的量子展开为例来具体地说明这个问题．

对于(1+1)维的系统的拉氏量由 (3.1) 表示．它对应的运动方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-g^{-1}V'(g\varphi)=0 \tag{8.2}$$

为了使孤立子解存在，则 V 的绝对极小值是简并的．为了不失一般性，我们可假设 $V(g\varphi)$ 的绝对极小值为零，则它存在若干 $g\varphi_i$ 使 $V(g\varphi_i)=0$．

设 $\varphi=g^{-1}\sigma(x)$，由 (8.2) 式可得到：

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2}-V'(\sigma)=0 \tag{8.3}$$

这意味着有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2-V(\sigma)=\text{常数}$$

则经典孤立子解 σ 为

$$\int_0^{\sigma}[2V(\sigma)]^{-\frac{1}{2}}d\sigma=x \tag{8.4}$$

来决定．根据前面定义的量子展开法，其量子解可表成

$$\varphi = g^{-1}\sigma(x-z) + q_n(t)\phi_n(x-z) \tag{8.5}$$

将 n 从 2 到∞求和，则 ϕ_n 满足的正交条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x-z)\phi_{n'}(x-z)dx = \delta_{nn'} \tag{8.6}$$

约束条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\sigma(x-z)}{\partial z}\phi_n(x-z)dx = 0 \tag{8.7}$$

而 ϕ_n 所满足的本征方程为

$$\left[\frac{-d\phi_n(x-z)}{dx^2} + V''(\sigma)\right]\phi_n(x-z) = \omega^2\phi(x-z) \tag{8.8}$$

我们若引入正则动量 π_n 和正则坐标 q_n，则这系统的 Hamilton 函数可表成

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(\pi_n^2 + \omega_n^2 q_n^2) + m \tag{8.9}$$

相应的能谱为

$$E = m_r + \sum_n N_n\omega_n$$

m，m_r 分别为孤立子未重整化和重整化后的质量．在忽略辐射修正下，有

$$m = m_r = g^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}\right]^2 dx$$

具体求解(8.4)和(8.6)—(8.9)式，便可以完全决定(8.5)式的量子展开．例如对于形如

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\mu^2}{g^2}\sin(\varphi g) = 0$$

的 SG 方程的孤立子——孤立子散射解的量子化解为

$$\varphi(x)=\frac{\phi}{g}\tan^{-1}\left[\frac{\mu \mathrm{sh}(r_\mu(x-z)\mu)}{e^\xi}\right]+q_n\phi_n(x-z,\xi)$$

$$\xi=\ln(\mathrm{ch}(r_\mu z\mu))\ (-\infty\leqslant\xi\leqslant\infty)$$

ϕ_n 满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\sigma(Y,\xi)}{\partial y}\phi_n(Y,\xi)dy=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\sigma(y,\xi)}{\partial\xi}\phi_n(Y,\xi)dy=0$$

参 考 文 献

[1] 江泽涵："拓扑学引论"，上海科技出版社，1977.
[2] S. T. Hu, Homotopy, Theory, Academic Press, New York, 1959.
[3] D. Husenmolber, Fibre, Bundles, Springer-Velag, Berlin Heidelberg New York, 1966.
[4] R. Shankar, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 1107.
[5] H. B. Nidsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.*, B61(1973), 45.
[6] D. Finkelstein, and J. Rubintein, *J. Math. Phys.*, (1968), 1762.
[7] G.'t. Hooft, *Nucl. Phys.*, B79(1974), 276.
[8] G. H. Derrick, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1252.
[9] S. Deser, *Phys. Lett.*, 64B (1976), 463.
[10] R. Friedbere, T. D. Lee, and A. Sirlin, *Phys. Rev.*, D13(1976), 2739.
[11] W. A. Bardeen, et. al., *Phys. Rev.*, D13(1975), 1094.
[12] R. D. Parks, "Superconductivity", New York, 1969.
[13] A. A. Belavin, A. Polgakov, A. Schwartzand, Y. Tyupkin, *Phys. Lett.*, 59B(1975), 85.
[14] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 1100.
[15] J. Arafune et. al., *J. Math. Phys.*, 16(1975), 432.
[16] D. Boulware et. al., *Phys. Rev.*, D14(1976), 2708.
[17] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.*, D11(1975), 2227.
[18] E. Tomboulis and G. Woo, *Nucl. Phys.*, B107 (1976), 221.
[19] M. Prasad and C. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975), 760.
[20] P. Hasenfratz, et. al., *Phys. Rev. Lett.*, 36 (1976), 1119.
[21] R. Jockiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, 36 (1976), 1116.
[22] E. Weinberg and A. Guth, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 1660.
[23] A. Patrascioiu, *Phys. Rev.*, D12 (1975), 523.

[24] T. D. Lee, *Phys. Rep.*, 23C (1976), 254.
[25] R. Friedbery, Lee, T. D. and A. Sirlin, *Phys. Rev.*, D13 (1976), 2739.
[26] N. Christ, T. D. Lee, *Phys. Rev.*, D12 (1975), 1606.
[27] 周光召等，中国科学，第十一期，1979，1057.
[28] T. D. Lee, *Physica Scripta.*, Vol. **20**(1979), 286.
[29] R. Friedberg, T. D. Lee and A. Sirlin, *Neclear Phys.*, B115(1976), 1.
[30] N. H. Christ, *Phys. Rep.*, 23C (1976), 294.
[31] R. Jaekiw, *Phys. Rep.*, 23C (1976), 273.
[32] V. Fnz, *J. Math. Phys.*, Vol. 18 (1977), No. 3, 347.
[33] L . D. Faddeev, V. E. Korepin, *Phys. Rev.*, 45D (1978), 1.

第十一章 凝聚态物理学中的孤立子

对于"孤立子问题"，当前研究的一个重点就是寻求自然界中什么样的物质在作孤立子运动？它有什么性质、特点？在第一章中我们已举了许多具体的物理过程的例子，说明了在自然界中存在着大量的孤立子运动．但是又如何从一个具体的过程来求出物质的孤立子运动形式．在前一章中我们已就基本粒子物理中的孤立子问题作过研究．其实，这种物质运动形式还大量存在于凝聚态物理、等离子物理、流体力学、天体物理、海洋学、分子生物学、材料科学和统计物理等中．尤其在凝聚态物理如超导体、非线性光学、固体、晶格振动、铁磁体和铁电体等中更加明显可见．这是由于凝聚态物质由大量原子、离子、分子因很强内聚力而集聚起来的物体．在适当的条件(如高压、高密度和低温等)下，体系的非线性作用变得非常明显时，其中的粒子可通过某种作用，耦合成一种特殊的"准粒子"状态而作孤立子运动．当孤立子以"准粒子"方式在凝聚态物质中运动时，将伴随着一些物理现象的发生如电荷密度波和自旋密度波和违反欧姆定律的电输运现象等．例如一维链状晶体(它的晶体结构象一条链子，链与链之间只有微弱的相互作用，例如人工合成的有机导体TTF-TCNQ就属于链状晶体)若以晶格位移作为自变量，则可以用 φ^4 场方程来描述这种链状晶体．发现其中存在的亚结构——畴壁就是 φ^4 场方程的孤立子解，它的能量及存在的电荷密度波和实验所得的结果十分吻合．

尤其应当指出的是超导体(包括液氦超流态)中的孤立子运动现象的问题，这是因为超导态是在体系的对称性自发破

缺后形式的相干态．在其中，电子之间的非线性作用起着重要作用． 难怪于因发现超导隧道效应而获得诺贝尔奖金的 Josephson 在其受奖演讲中特别强调了超导体的对称性自发破缺问题的重要性，而恰好 Higgs 场又与对称性自发破缺紧密相关．因此，孤立子在超导研究中占着重要地位是可以想象得到的．在这一章中，我们将以超导体、铁电体、固体和晶格振动等几个具体物理过程和现象为研究对象来建立其运动方程，并用所求得的孤立子解来解释在其中所发现的一些物理现象． 最后还要对 N 个孤立子系统的统计规律作一些研究．这样做的目的是使我们明确如何通过一个具体的物理过程来建立起孤立子的运动方程．

第一节　超导体中的孤立子运动

在超导现象中，传导电子通过晶格振动(声子)而耦合成的束缚电子对的波函数(宏观量子波函数或序参量)常表成

$$\varphi(r)=\varphi_A(r)e^{i\theta(x)}\cdot\ \varphi_A(r)\propto\sqrt{h_s(r)} \tag{1.1}$$

h_s 超导电子对的密度．1935 年 Landau 用 $\varphi(r)$ 表出了超导体系的自由能密度在有电磁场 $\boldsymbol{A}$ 存在时应为

$$f_{SH}=f_{n0}+\alpha|\varphi(r)|^2+\frac{1}{2}\beta|\varphi(r)|^2$$

$$+\frac{1}{4m}\left|\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}A(r)\right)\varphi(r)\right|^2+\frac{h^2(r)}{8\pi} \tag{1.2}$$

这里 f_{n0} 是正常态的自由能，$\boldsymbol{A}(r)$ 是所加电磁场的矢势，$\boldsymbol{h}(r)=\nabla\times\boldsymbol{A}(r)$ 为超导体内 $\boldsymbol{r}$ 点的磁场，α，β 是与 T 有关的常数．而超导体的自由能可表成：

$$F_{SH}=\int f_{SH}dr=F_{n0}+\int\left\{\alpha|\varphi|^2+\frac{\beta}{4}|\varphi|^4\right.$$

$$+\frac{1}{4m}\left|-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\varphi(r)\right|^2$$

$$+\frac{h^2(\boldsymbol{r})}{8\pi}\Big\}d\boldsymbol{r} \tag{1.3}$$

由 F_{SH} 极小的条件即变分 $\delta F_{SH}=0$，则可得到超导体中有名的 Ginzburg-Landau(GL) 方程[1]为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-\dfrac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\varphi+2\varphi+\beta|\varphi|^2\varphi=0\\ \boldsymbol{h}\cdot\left(-i\hbar\nabla-\dfrac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi=0\\ j_S(r)=\dfrac{-ie\hbar}{2m}(\varphi^*(r)\nabla\varphi(r)-\varphi(r)\nabla\varphi^*(r))\\ \qquad\qquad-\dfrac{2e^2}{m_c}\varphi^*(r)\varphi(r)A(r)\end{cases} \tag{1.4}$$

这个方程组也可以表成：

$$\begin{cases}\xi^2(T)\left(\nabla-i\dfrac{2e}{\hbar c}\right)\boldsymbol{A}(r)^2\varphi(r)+\varphi(r)\\ \qquad\qquad-\dfrac{1}{\varphi_0^2}|\varphi(r)|^2\varphi(r)=0\\ \boldsymbol{j}_S(r)=\dfrac{-c}{4\pi\lambda^2(T)\varphi_0^2}\Big[|\varphi(r)|^2A(r)\\ \qquad\qquad+\dfrac{i\hbar c}{4e}(\varphi^*(r)\nabla\varphi(r)-\varphi(r)\nabla\varphi^*(r)\Big]\end{cases} \tag{1.5}$$

其中，

$$\varphi_0(r)=\varphi_A(r)|_{h=n_0}=\sqrt{h_0}$$

h_0 是当磁通线不存在时的超导电子对密度．这里

$$\nabla\times h=\frac{4\pi}{c}j_S(r),\quad \nabla\times A=h(r)$$

$\xi(T)$ 是超导态的相干长度，$\xi^2(T)=\hbar^2/4m|\alpha(T)|$，$\lambda(T)$ 是穿透深度，K 为 GL 参量，$K=\lambda(T)/\xi(T)$.

对于当

$$H > H_{c1}(T) \ \left(= \frac{1}{\sqrt{2}\,K}(\ln K)H_c(T) \right),$$

H_c 为热力学临界场，H_{c1} 为下临界场）的混合态。在热力学平衡状态下，可以直接求解。在

$$H \lesssim H_{c2}(T) \quad (H_{c2} = \sqrt{2}\,KH_c(T)$$

是上临界场）时，$|\varphi|$ 很小，$\boldsymbol{A}(r) \approx H_{c2}X\hat{Y}$，则 (1.5) 式可近似为以下的线性方程式[2]，即

$$\xi^2(T)\left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c}H_{c2}X\hat{Y}\right)^2\varphi(r) + \varphi(r) = 0 \qquad (1.6)$$

它的解为

$$\varphi(X, Y) = e^{iKY}e^{-\frac{1}{2\xi^2(T)}(X-\xi^2(T)K)^2}$$

K 是任意常数。上式的线性组合得到其 (1.6) 式通解。即

$$\varphi_L(X, Y) = \varphi_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iK_nY}e^{-\frac{1}{2\xi^2(T)}(X-\xi^2(T)K)^2} \qquad (1.7)$$

在理想的第 II 类超导体中，利用已有的物理条件，可确定其 (1.7) 式的一些常数，则 (1.7) 可表成：

$$\varphi_L(X, Y) = C_0\varphi_0 e^{-\frac{X^2}{2\xi^2(T)}}\sum_{n-\infty}^{\infty} e^{n\sqrt{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{X+iY}{\xi(T)}} e^{n^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad (1.8)$$

$n_s(X, Y) = |\varphi_L(X, Y)|^2$，显然它具有三角形对称性。晶格常数为

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{3}\pi}}\xi(T)$$

即：

$$\varphi_L(x, y + ma) = \varphi_L(X, Y)$$

$$\varphi_L\left(x + l_x\cos\frac{\pi}{6}, y + l_x\cos\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{1}{2}il^2\pi} e^{i\frac{2\pi}{a}l_y}\varphi_L(X, Y)$$

(1.9)

其中，l，m 为任意整数。

由这个解，就可以得出在理想的第 II 类超导体中，磁通线或涡旋线是三角形周期性排列的，这种结构称为 Abrikosov 结构[3]。这种结构已为实验所证实。在不理想的第 II 类超导体中，从整体来看，涡旋线不是三角形分布的，但其局部仍有此分布。我们可以证明这种磁通线（涡旋线）是十分稳定的。每一根磁通线所具有的能量为

$$\varepsilon = \varphi_0 H_c(T) l_n K / 4\sqrt{2}\,\pi K$$

从 (1.4) 或 (1.5) 式可以看出，GL 方程是非线性偏微分方程组，按理它应有孤立子解存在。例如在 (1.4) 或 (1.5) 式中令 $A=0$ 时，便得到质量为 $2m$，电荷为 $2e$ 的电子对所满足的非线性 Schrödinger 方程式。它有波包型（钟型）孤立子解也是人所共知的事实。此解早已由 de Gennes 求出过[1]。但是在 $A\neq 0$ 时，求解 (1.4) 式或 (1.5) 式的孤立子解是十分困难的。最近 Jacobs 等人[4]用 Abel, Higgs 场方法研究了这个问题。

他们把超导体的自由能表示成：

$$F = \frac{C_0}{e}\int\left[\frac{1}{2}\left|\left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c}A_i\right)\varphi\right|^2 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{8}\lambda^2(|\varphi|^2-1)^2\right]d^3x \tag{1.9$'$}$$

其中

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

$$i, j = 1, 2, 3, \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ (i = 1, 2, 3)$$

A 是规范电磁场矢势，λ 是耦合常数。

运用 Euler-Lagrange 方法，上式可得到：

$$
\begin{cases}
\left(\partial - i\frac{e}{\hbar c}A\right)\left(\bar{\partial} - i\frac{e}{\hbar c}\bar{A}\right)\varphi + \left(\bar{\partial} - \frac{ie}{\hbar c}\bar{A}\right) \\
\qquad \times \left(\partial - \frac{ie}{\hbar c}A\right)\varphi - \frac{1}{4}\lambda^2\varphi(\varphi\bar{\varphi} - 1) = 0 \\
4\partial\bar{\partial}A - 4\partial^2 A - i\bar{\varphi}\partial\varphi + i\varphi\partial\bar{\varphi} - \partial A\varphi\bar{\varphi} = 0
\end{cases} \tag{1.10}
$$

注意 Jacobs 等人仅研究场组态在沿确定的第三轴的平移时有不变的情况，这时场仅依赖于 x_1，x_2 和 $A_3 = 0$。因此可设

$$
z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2
$$

$$
A = \frac{1}{2}(A_1 - iA_2), \quad \bar{A} = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2)
$$

$$
\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)
$$

$$
\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)
$$

$$
\tilde{x}_i = \frac{\hbar c}{e|\varphi|_0}\bar{x}_i, \quad \bar{\varphi} = |\varphi_0|\varphi
$$

$$
\tilde{A}_i = |\varphi|_0 A, \quad |\varphi|_0 = C_0
$$

他们进一步假设：

$$
\varphi = e^{i\theta n}f(r), \quad A = -(ni/2z)a(r)
$$

$$
r = |z|, \quad f(\infty) = a(\infty) = 1
$$

则 (1.10) 式可变成

$$
\begin{cases}
\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{n^2(a-1)}{r^2}f - \frac{1}{2}\lambda f(f^2 - 1) = 0 \\
\frac{d^2a}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{da}{dr} - (a-1)f^2 = 0
\end{cases} \tag{1.11}
$$

其中，n 与磁通量有关，即

$$
\Phi(B) = \frac{-i}{e}\int(\partial\bar{A} - \bar{\partial}A)dz\,d\bar{z} = \frac{2\pi n}{e}
$$

他们假设

$$f(r)=1+e^{-\lambda\rho}\sum_{l=0}^{n}(f_l\rho^l/l!)$$

$$a(r)=1+e^{-\rho}\sum_{l=0}^{n}(a_l\rho^l/l!)$$

代入（1.11）式，Jacobs 等人用变分方法，求得了两个磁通线之间的相互作用能与两磁通线间矩 d 和 φ 场与电磁场 A 之间的耦合常数 λ 之间的关系。计算结果表明：对于 $\lambda<1$ 时，两磁通线之间相互吸引，当 $\lambda>1$ 时两磁通线之间是排斥的，在 $\lambda=1$ 时，无相互作用。他们还用数值积分方法，求出了在 $\lambda=1$，和 $d=1,2,3,4$ 时，两个磁通线的能量密度 ε，场 φ 和磁场 h 的分布。其结果如图 11-1 所示。

以上是在大块的同一超导体中，超导电子对的运动情况。下面我们来研究超导电子对通过有相位变化的弱相连超导结时的运动情况。

对于这个问题，1962 年 Josephson 从理论上预言，如果超导体-氧化物-超导体结（Josephson 结）的氧化物层很薄（～10—30 Å），氧化物双方的超导体仍有弱的连接，电子对仍能穿过氧化层，而形成直流的 Josephson 效应。1964 年由实验所证实。

结与电磁场相互作用时出现的一些现象称为交流 Josephson 效应。如果在结的氧化层双方加上电压 V，电子对将从化学势高的一方向化学势低的一方通过氧化层，此过程是无能量损耗的。这就多出了 $2eV$ 的能量，按能量守恒定律，这部分能量以电磁波形式发出，其频率满足：$2eV=h\nu$。另外，如果用微波从外部照射到 Josephson 结上，并使用偏流源，则在 I-V（安-伏）特征曲线上出现一系列的等电压阶梯。其第 n 个阶梯的电压 V_n 满足 $V_n=nh\nu/2e$ 或 $2eV_n=$

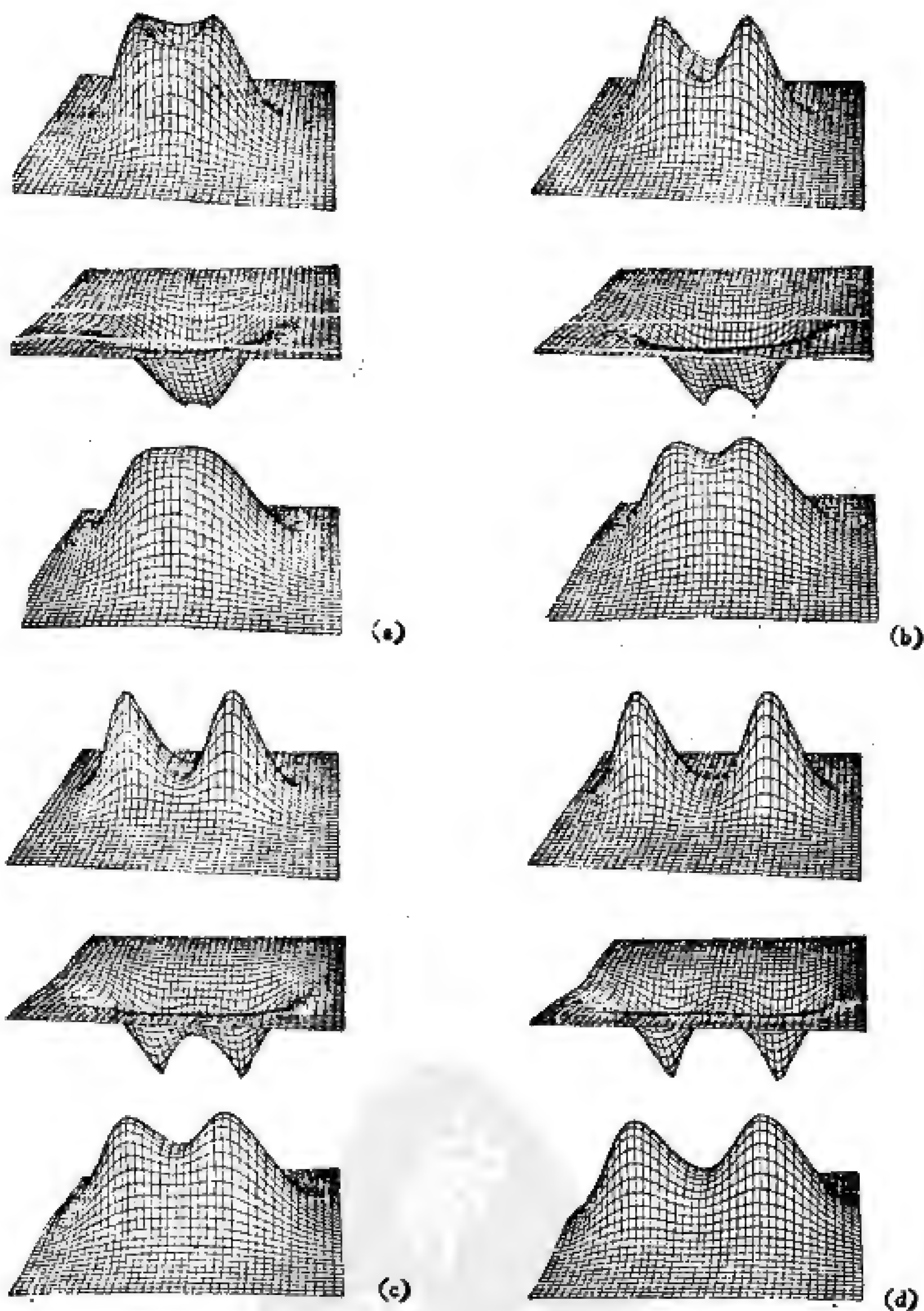


图 11-1　在 $\lambda=1$ 和间距 $d=1, 2, 3, 4$ (分别相应于 a, b, c, d) 时，两个涡旋的能量密度(上)，物质场 φ 大小(中)，和磁场 h (下)的分布.

$nh\nu$. 这些现象已在实验中多次观察到. 研究表明,它们和超导电子对通过超导结时所引起的位相的改变 $\Delta\theta = \varphi$ 直接相关,并由此引起 Josephson 电流的出现和磁通线的变化,而且可沿着超导结进行传播.下面我们来研究这种运动的规律.

在超导结上所存在的人所共知的 Josephson 关系式[15]为

$$\begin{cases} j = j_c \sin\varphi, \quad \hbar\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 2eV \\ \hbar\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{2ed}{c}H_y, \quad \hbar\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{2ed}{c}H_x \ (\varphi = \theta_1 - \theta_2) \end{cases} \tag{1.12}$$

(1.12) 式不是一组封闭方程. 因为 v 和 H 不知道, 通常要和 Maxwell 方程:

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c}j$$

联立求解. 在 $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, 0)$ 的条件下,有:

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y}H_x(x, y, t) = \frac{4\pi}{c}j(x, y, t) \tag{1.13}$$

又因为

$$j = j_s(x, y, t) + j_n(x, y, t) + j_a(x, y, t) + I_0 \tag{1.14}$$

这里 j_n 是结中的正常电流密度,如果结上有电阻 $R(V)$,而且两边也存在电压时, $j_n = V/R(V)$. j_a 叫位移电流,可表成 $j_a = c\dfrac{dV(t)}{dt}$, I_0 是常电流. 把 (1.12)—(1.14) 式联立求解,可得到:

$$\frac{\hbar c}{e^* d}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar c}{e^*}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{e^* R}\frac{d\varphi}{dt} + j_c\sin\varphi + I_0\right) \tag{1.15}$$

设

$$V_0=\left(\frac{c^2}{4\pi c d}\right)^{1/2},\quad \nu_0=\frac{1}{RC}$$

$$\lambda_J=\left(\frac{c^2\hbar}{4\pi d e^*}\right)^{1/2},\quad j_0=\frac{4I_0\pi e^* d}{\hbar c^2}$$

则(1.15)式变成:

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi+\gamma_0\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)=\frac{1}{\lambda_J^2}\sin\varphi+j_0 \quad (1.16)$$

这是一个完整的超导结中的超导电子波函数的位相差 φ 满足的方程式[2],[5].

当结中无 Josephson 电流 $j_s=0$ 及 $j_0=0$ 时,(1.16)式变成:

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi-\frac{\gamma_0}{V^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=0$$

如果上式分别对 x, y, t 取偏导数,再利用(1.12)式和

$$E_z=\frac{1}{d}V,$$

可得:

$$\begin{cases}\nabla^2E_z-\dfrac{1}{V_0^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}E_z-\dfrac{\gamma_0}{V_0^2}\dfrac{\partial}{\partial t}E_z=0\\[2ex]\nabla^2H-\dfrac{1}{V_0^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}H-\dfrac{\gamma_0}{V_0^2}\dfrac{\partial}{\partial t}H=0\end{cases}$$

这是一组关于电磁场的波动方程,其解代表沿阻尼系数 γ_0 的结平面传播的电磁波,而这时电磁波的传播速度为 V_0.

在一般情况下,超导体中 j_n 很小,即单电子的结电阻 R 很大时,可认为 $j_n\to 0$, 则(1.16)式变成:

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{\lambda_J^2}\sin\varphi \quad (1.17)$$

在平衡态(即与 t 无关)时,(1.17)式变成:

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\lambda_J^2}\sin\varphi \quad (1.18)$$

在一维和弱磁场条件下，(1.18)式变成：

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\lambda_J^2}\varphi$$

其解为

$$\begin{cases}\varphi(x) = -\dfrac{2e^* d\lambda_J}{\hbar c} H_0 e^{-x/\lambda_J} \\ H(x) = H_0 e^{-x/\lambda_J}\end{cases} \tag{1.19}$$

在二维下为

$$\begin{cases}\varphi(x, y) = -\dfrac{4e^* d\lambda_J}{\hbar c} H_0 e^{-(x+y)/\lambda_J} \\ H(x, y) = H_0 e^{-(x+y)/\lambda_J}\end{cases} \tag{1.20}$$

这正是超导体中发生的 Meissner 效应。λ_J 是 Josephson 穿透深度。

在一维下，(1.18)式的解为：

$$\varphi = 4\tan^{-1} e^{\frac{x-x_0}{\lambda_J}}$$

这是静态结状孤立子。

由(1.15)式描述的系统，是对称性自发破缺的系统，它存在无穷多个简并的基态，因此这时出现孤立子解是不成问题的。则(1.17)式对(1+1)维系统的结状孤立子解是我们都很熟悉的了，即为：

$$\varphi_S = \pm 4\tan^{-1}\exp\left[\pm\frac{x-ut}{\lambda_J - \sqrt{1-u^2}}\right]$$

$$\begin{cases}\text{“}\pm\pm\text{”表正结状孤立子} \\ \text{“}-+\text{”表反结状孤立子}\end{cases} \tag{1.21}$$

这表明相位场 φ 在作孤立子运动。从而伴随着 Josephson 效应的产生。对于(1.21)式的孤立子的质量为

$$M^{cl} = \frac{8m'^3}{\beta''}\left(\frac{m'}{\beta''} - \frac{1}{\lambda_L^2}\right),$$

也可证明这种孤立子是稳定的.

以上研究的是无边界条件的 Josephson 结的 SG 方程的解. 但它并不普遍. 实际上, 一般的超导结都具有一个确定的边界条件或接有用电器. 这种情况的 SG 方程就难以求解. 最近 Scott 和 Constabile 等人[7] 进行了广泛研究, 由于复杂,下面仅列出结果. 对具有确定边界条件如:

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0 \tag{1.22}$$

则 Sine-Gordon 方程的解又为何呢? Lamb 曾得到这种情况下 SG 方程的解为:

$$\varphi(x, t) = 4\tan^{-1}[h(x)g(x)] \tag{1.23}$$

其中 h 和 g 是一般的 Jacobian 椭圆函数. 它满足:

$$(h')^2 = ah^4 + (1+b)h^2 - c \quad 和 \quad g'^2 = cg^4 + bg^2 - a$$

(a, b, c 为任意常数). Constabile 等人[7]给出了有振动的孤立子波的三种基本解,为:

(1) 等离子振荡解,其形式为:

$$\varphi = 4\tan^{-1}\left[A\mathrm{cn}\left(\frac{\beta x}{\lambda_f\sqrt{1-u^2}}, K_f\right), \mathrm{cn}(\Omega t, K_g)\right]$$

这里

$$K_f^2 = \frac{A^2[\beta^2(1+A^2)+1]}{\beta^2(1+A^2)^2}$$

$$K_g^2 = \frac{A^2[\Omega^2(1+A^2)-1]}{\Omega^2(1+A^2)^2}$$

Ω, β 和 A 服从非线性色散方程:

$$\Omega^2 - \beta^2 = \frac{1-A^2}{1+A^2}$$

由边界条件所要求的周期性,我们得到:

$$\beta_N = \frac{ZN}{L}\mathrm{K}(K_1)$$

这里, $N = 1, 2, \cdots$是稳定波的结点数. $\mathrm{K}(K_1)$ 是第一类完

全椭圆函数.

(2) 呼吸子振荡解：它可以采用两种形式，(a) 局域在 Josephson 结中心的涡旋-反涡旋束缚态. (b) 在 Josephson 端点处的涡旋所约束的虚的反涡旋的状态. 这解为：

$$\varphi = 4\tan^{-1}\left\{A\,\mathrm{dn}\left(\frac{\beta(x-x_0)}{\lambda_j(1-u^2)^{1/2}};\ K_j\right), \mathrm{sn}(\Omega t; K_g)\right\}$$

$$K_j^2 = 1 - \left(\frac{1-\beta^2(1+A^2)/A^2}{\beta^2(1+A^2)}\right)$$

$$K_g^2 = \frac{A^2[1-\Omega^2(1+A^2)]}{\Omega^2(1+A^2)}$$

其非线性色散关系为：$\beta = \Omega A$. 由开放边界条件所要求：

$$\beta_n = \left(\frac{n}{L}\right)\mathrm{K}(K_j)$$

(3) 涡旋线振动解,其形式为：

$$\varphi = 4\tan^{-1}\left[A\,\mathrm{dn}\left(\frac{\beta_x}{\lambda_j\sqrt{1-u^2}};\ K_j\right), \mathrm{tn}(\Omega t; K_g)\right]$$

$$K_j^2 = 1 - \left(\frac{(\beta^2/A^2)(A^2-1)-1}{\beta^2(A^2-1)}\right)$$

$$K_g^2 = 1 - \left(\frac{A^2\Omega^2(A^2-1)-1}{\Omega^2(A^2-1)}\right)$$

其非色散关系与上相同.

对于有消散结构存在一般方程式 (1.16)，只有在 i_0 和 $\frac{\gamma_0}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 很小，并且两者相等而相互抵销后，才可求出一个稳定的孤立子解来. 其解仍为(1.23)式，由于 Sine-Gordon 方程具有 Lorentz 不变性,即在

$$x \to x' = (x-ut)/(1-u^2)^{1/2},$$
$$t \to t' = (t-u^{-1}x)/(1-u^2)^{1/2}$$

下不变,则解为

$$\varphi(x,t)=4\tan^{-1}\left[f\left(\frac{x-ut}{(1-u^2)^{1/2}}\right)g\left(\frac{t-x/u}{(1-u^2)^{1/2}}\right)\right] \quad (1.24)$$

这种摆动 (wobbing fluxon) 涡旋线可以产生辐射.

如果结的一端是接电阻,即 (1.22) 式变成:

$$\begin{cases}\varphi_x(0,t)=0\\ -\varphi_t(L,t)/\varphi_x(L,t)=R_0\end{cases} \quad (1.25)$$

在这种情况下,形成以速度 $u=-\varphi_t/\varphi_x$ 传播的横向波. 当 g 为常数时, 解 (1.24) 式为单纯的横向波. 当 g 不为常数时,解 (1.24) 式不能满足边界条件 (1.25) 式. 我们期待电阻在一端终止,涡旋线振动解得到能量,转变为等离子和呼吸子涡旋振荡解.

如边界条件改为:

$$\begin{cases}\varphi_x(0,t)-\alpha\varphi_t(0,t)=0\\ \varphi_x(L,t)+\beta\varphi_t(L,t)=0\\ \varphi(x,0)=F(x,0,n)\\ \varphi_t(0,x)=F_t(x,0,n)\end{cases} \quad (1.26)$$

则对应的 Sine-Gordon 方程的解为:

$$F(x,t,n)=4\tan^{-1}\exp\left[\frac{x-u_0t-x_0}{\lambda_J\sqrt{1-u^2}}\right]$$
$$+(n-1)4\tan^{-1}\exp\left[\frac{x-u_1t-x_1}{\lambda_J\sqrt{1-u^2}}\right] \quad (1.27)$$

其中, 第一项表示初始位置和速度分别为 x_0 和 u_0 的涡旋线. 当 $n=2$ 时,第二项表示具有初始速度和位置为 u_1 和 x_1 的第二根涡旋线的运动.

从以上看来, 涡旋线沿超导结的传输过程是相当复杂的物理过程. 在不同的物理条件和物理环境中, 涡旋线的传输方程式是极不相同的,所表现出来的性质和特点也不一样.这种过程使我们深刻认识到,涡旋线作为孤立子状态而运动,是

由于有一个"非线性势场"作用的结果。因此，这时伴随着一系列非平衡现象在超导结上出现。

第二节　铁电体中的孤立子运动

我们已知道，在铁磁体中的畴壁有两种位形组态，其中之一是 Ising 畴壁(对于较大的单轴各向异性体)。另一个对应于 Bloch 畴壁。这种位形组态的变化是一个二维相变。其序参量具有空间螺旋性特征。由第一章可知，这种 Bloch 壁的运动服从 Sine-Gordon 方程。它具有扭结孤立子解。那么在铁电体中有否类似现象发生呢？现研究表明，在铁电体中也存在着两种类型的位形组态即铁电相和反铁电相。这两种类型的有序状况相互竞争而形成的铁电畴壁的结构和运动又怎么样呢？这是值得研究的。

当处于有序的铁电相和反铁电相的情况下，人们常用 Landau 理论来描述它[8],[12]。和铁磁体情况一样，也要引入有序参量。如果用 P_1 和 P_2 作为两种子晶格的极化强度，则系统的自由能可表成：

$$F = \frac{c}{2}[(\Delta P_1)^2 + (\nabla P_2)^2] + \frac{a}{2}(P_1^2 + P_2^2) + bP_1P_2 + \frac{d}{4}(P_1^2 + P_2^2)^2 \ (d > 0) \qquad (2.1)$$

现在我们引入两个变量，对应于铁电性和反铁电性，即

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_2),\ A = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 - P_2) \qquad (2.2)$$

则自由能可表成：

$$F = \frac{c}{2}[(\nabla B)^2 + (\nabla A)^2] + \frac{a+b}{2}B^2$$

$$+\frac{a-b}{2}A^2+\frac{d}{4}(B^2+A^2)^2 \tag{2.3}$$

当 $A=0, B=\pm\sqrt{-(a+b)/d}$ 时是铁电相，在 $B=0$，$A=\pm\sqrt{b-a/d}$ 时是反铁电相，其相图如图 11-2 所示。其中 B，A，P 区域分别表示铁电相，反铁电相和顺电相。I 区表示在铁电相中存在有反铁电特征时所形成的畴壁。II 区域表示在反铁电相中存在有铁电特征时所形成的畴壁。 所以，如果 b 变化时，则在 $b=0$ 处我们就得到铁电相到反铁电相的一级相变。这种现象已在晶体如 $Pb(Zr_{1-x}Ti_x)O_3$ 中实际观察到。从而证实了上述理论是正确的。

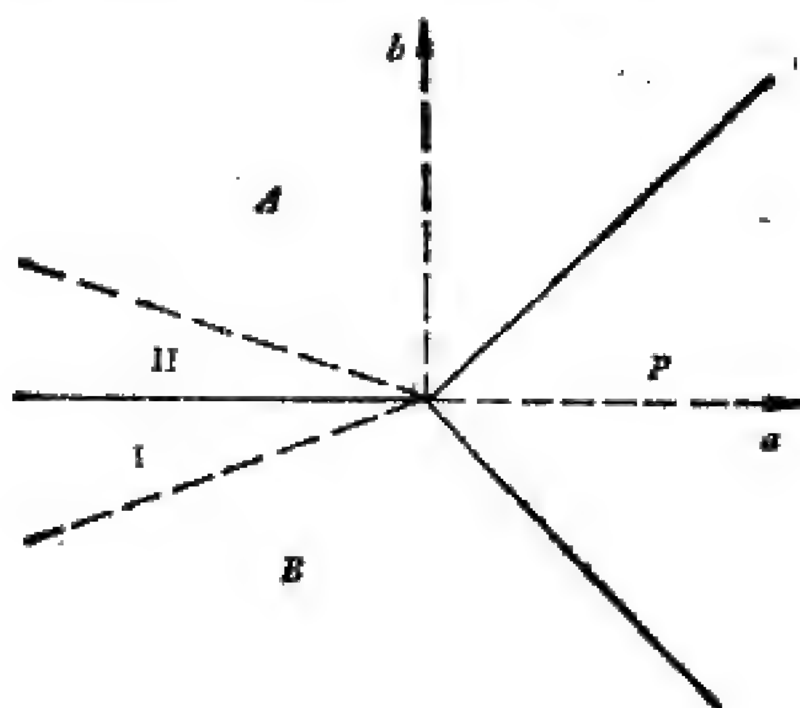


图 11-2 铁电体的相图。

由上可知，铁电相和反铁电相完全处于对称的情况之中。因此以下我们只研究铁电畴壁。由 Euler-Lagrange 方程可得：

$$\begin{cases} c\nabla^2 B-(a+b)B-d(B^2+A^2)B=0 \\ c\nabla^2 A+(b-a)A-d(B^2+A^2)A=0 \end{cases} \tag{2.3'}$$

当 $A=0$ 时，得到 B 的类-φ^4 场方程式

$$c\nabla^2 B-(a+b)B-dB^3=0 \tag{2.4}$$

此方程的孤立子解即铁电畴壁是很容易求得的,即

$$B_0(x)=\sqrt{-\frac{a+b}{d}}\tanh\left(x\sqrt{-\frac{a+b}{2c}}\right) \tag{2.5}$$

现在我们来研究这种畴壁的稳定性. 即围绕上述解 $B_0(x)$ 的小激发:如果我们取铁电相和反铁电相的有效密度为 ρ_f 和 ρ_A (为简单起见设 $\rho_f=\rho_a=P$),并把 B 和 A 表成

$$B=B_0(x)+B_1(x,t),\quad A=A_1(x,t) \tag{2.6}$$

将(2.6)式代入(2.3)式,在一阶近似下,我们可得到本征方程为:

$$\begin{cases}\rho\omega^2B_1=-c\nabla^2B_1+(a+b)B_1\\ \qquad -3(a+b)B_1\tanh^2\left(x\sqrt{-\frac{a+b}{2c}}\right)\\ \rho\omega^2A_1=-c\nabla^2A_1+(a-b)A_1\\ \qquad -(a+b)A_1\tanh^2\left(x\sqrt{-\frac{a+b}{2c}}\right)\end{cases} \tag{2.7}$$

很容易求出以上这类 Schrödiger 方程的本征能谱来. 如果这些方程的本征值是正的,则这个系统是稳定的. 对于第一个方程,它的本征值都是正的. 对于第二个方程,我们可写出其最低本征值为 $\rho\omega_0^2=\frac{a-3b}{2}$.

所以如果 $a>3b$, 能抑制这种反铁电涨落而使畴壁是稳定的. 如果 $3b>a$, 则因这涨落作用大而使系统处于不稳定状态. 在阈值 $3b=a$ 附近,对于 ω_0, 表现出一种软模行为. 因此,在合作的过程中,畴壁改变了位形组态.

关于非线性方程组(2.3)式, Sarker 等人[9] 已进行过研究. 我们这里列出其两组解,即:

a) $3b-a<0$, $B=\sqrt{-\frac{a+b}{d}}\tanh\left(x\sqrt{\frac{-(a+b)}{2c}}\right)$,

$$A=0$$

b) $3b-a>0$， $\begin{cases} B=\sqrt{-\dfrac{a+b}{d}}\tanh\left(x\sqrt{-\dfrac{2b}{c}}\right) \\ A=\sqrt{\dfrac{3b-a}{d}}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x\sqrt{-2b/c})} \end{cases}$

由此看到，反铁电分量的振幅正好是我们问题中的有序参量。因此畴壁表现出一个反铁电分量。

有趣的是，当 b 趋近于 0 时，在铁电-反铁电相变附近，反铁电分量的宽度是发散的。这表明，在发生一级相变时，在畴壁内，新相的核化过程已出现了。

以上情况在反铁电相中也同样出现，即在反铁电畴壁中存在有铁电分量。当附加一梯度场时，这种结构是十分敏感的。如果我们和铁电情况相比较。便会给出一个有效场

$$\boldsymbol{E}_{eff}=(\operatorname{grad}\boldsymbol{E})\times\delta,$$

δ 是畴壁的宽，为$\sqrt{c/-2b}$。有效场一般是很小的。我们可预料以上情况也在铁磁-反铁磁相变中发生[10]。

第三节　关于固体的耦合系统中的孤立子

在固体中所发生的现象是千差万别的。正如在第一章所指出的那样，如果考虑原子振动的非谐振性所引起的声学模式和光学模式，将伴随着波包型的孤立子运动[13]，它们发生在单一模式的非线性系统中。如果在固体中存在两种模式的耦合的系统，那么情况又会怎么样呢？ Moskalenko 等人[14]研究了激子-电磁模式的耦合系统和双能级原子-电磁模式（*two-level atom-electromagnetic mode*）耦合系统的情况，结果发现其中有波包型的孤立子运动。这一研究启发了 Nelson，他接着研究了光学模式-电磁模式的耦合系统（在这当中的线性正弦式激发（*linear Sinusoidal excitation*）称为极化子（*polaritons*））

和光学模式-声学模式的耦合系统的情况[10]. 研究表明其中也存在孤立子运动. 在这样的物理系统中为什么会出现孤立子运动呢？为了明确它的物理起源，我们来考虑一个光学模式. 它的势能包括了光学模式振幅的二次项和四次项. 我们假设每一项都可产生一个恢复力(*restoring force*)，虽然二次项对应的恢复力是很小的. 换句话讲，我们考虑的是在相变温度之上的软模 (*Soft mode*) 行为. 如果这种转变是铁电-顺电相变，则我们将研究一个电磁波和一个光学模式的耦合情况. 如果这个转变是一个铁弹性-顺弹性 (*Ferroelastic-paraelastic*) 相变，则我们将研究一个声波和光学模式的耦合情况. 在这两种情况下，对于行波的耦合项都能引起二次项反号而变成非恢复力. 因此，在相互作用时，光学模式的有效势能便有两个极小值. 众所周知，这样一个双势阱的势能曲线的存在，很象在拓扑性孤立子中的简并真空一样，从而引起了孤立子运动的出现. 下面我们来对这样的耦合系统作理论研究.

首先来研究光学模式和电磁模式的耦合系统. 我们现先构造在这一系统中光学模式和外加的电磁模式的非线性相互作用. 它可由一个电场本征模式的标量振幅 $\boldsymbol{E}$ 的电场波动方程:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{K_h}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{q}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

和一个光学模式的标量法向(*normal*)坐标 y 的非线性力方程:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A_{20}y-A_{40}y^3+qE \tag{3.2}$$

所描述，这里，K_h 是在高于光学模式的共振频率的频率范围的介质常数. q 和 m 是同光学模式相关联的电荷和质量密度. A_{20} 和 A_{40} 是光学模式的线性和非线性恢复力项所对应

的特征常数．我们仍假设 $A_{20}>0$，$A_{40}>0$，这里的光学模式的势能在 $y=0$ 处有单一的极小值．而晶体的非微扰状态有：$y=0$ 和 $E=0$ 存在．

现在先求出其稳定的准脉冲式解．为此在 (3.1) 式中作坐标变换：$\xi=z-Vt$，则 (3.1) 式变成

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}=\frac{V^2 q}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\cdot\frac{1}{(c^2-K_h V^2)}$$

再积分两次，可得到：

$$E=V^2 q y/\varepsilon_0(c^2-K_h V^2) \tag{3.3}$$

为了满足边界条件：

$$E=y=\frac{\partial E}{\partial \xi}=\frac{\partial y}{\partial \xi}=0 \quad (\xi=\pm\infty) \tag{3.4}$$

因此在 (3.3) 式的两个积分常数我们都取作零．

对于光学模式的运动方程 (3.2) 现变成

$$m^2 V^2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}=-A_{20}y-A_{40}y^3 \tag{3.5}$$

这里已将 (3.3) 代入 (3.2) 式了．其中，

$$A'_{20}=A_{20}V_h^2(V_l^2-V^2)/V_l^2(V_h^2-V^2)$$

$$V_h^2=c^2/K_h,\ V_l^2=c^2/K_l$$

$$K_l=K_h+q^2/\varepsilon_0 A_{20}$$

K_l 是低于光学模式共振频率的频率范围的介质常数．对于 (3.5) 式要有孤立子解存在，必须有

$$A'_{20}<0,\quad 即\ V_l<V<V_h \tag{3.6}$$

这表明孤立子的速度允许的范围和极化子相速度的禁区范围一致．

在此条件下，利用边界条件再积分两次，便可得到波包型孤立子解为：

$$
\begin{cases}
y = y_0 \operatorname{sech} K(\xi - \xi_0) \\
E = \dfrac{\varepsilon y_0}{\varepsilon_0(V^{-2} - V_h^{-2})} \operatorname{sech} K(\xi - \xi_0)
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

其中，光学模式的振幅 $y_0 = AK\nu/\pi$. 准-波矢为：

$$
K = \left(\frac{\omega_L}{V}\right)(V^2 - V_h)^{1/2}/(V_{ll}^2 - V^2)^{1/2} \tag{3.8}
$$

ξ_0 是积分常数，A 是一个面积常数：

$$
A = \int_{-\infty}^{\infty} y dt = \pi\left(\frac{\partial m}{A_{40}}\right)^{1/2}
$$

ω_L 和 ω_T 是纵向和横向频率，有

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\omega_L}{\omega_T}\right)^2 = \left(\dfrac{V_h}{V_l}\right)^2 = K_l/K_h \\
\omega_T = (A_{20}/m)^{1/2}
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

等式 (3.7)，(3.8) 叫做 Lyddane-Sachs-Teller (LST) 关系式. 一般来讲，V_h 和 V_l 被认为是一个极限速度，它们能由产生频率 ω 的发射中止范围即 $\omega_T<\omega<\omega_L$ 的光学模式共振的高频率和低频率段来量度. 考查孤立子解 (3.7)，(3.8) 式，发现 LST 关系的另一种解释存在，即 V_n 是最大振幅的速度，也即是最窄孤立子的速度，V_l 是最低振幅即最宽孤立子的速度.

(3.8) 式就是孤立子的色散关系，它表示了准波矢 K 和速度 V 的关系. 由此式使我们看到，这个关系仅依赖于介质的线性特征，这就是说对于一个固有的非线性波的色散关系没有包含非线性特征. 如果我们现定义一个准频率 $\omega = KV$，则色散关系可以变成一个更明显的形式. 此时 (3.8) 式变成了

$$
K^2 = (\omega/V_h)^2(\omega_L^2 + \omega^2)/(\omega_T^2 + \omega^2) \tag{3.10}
$$

将它和不含非线性参数(即 $A_{40} = 0$) 的单色平面波解(极化

子)所对应的色散关系

$$K_p^2 = (\Omega_p/V_h)^2(\omega_L^2 - \Omega_p^2)/(\omega_T^2 - \Omega_p^2) \qquad (3.11)$$

相比较(这里极化子的波矢 K_p 和频率 Ω_p 有通常的意义,即 $E \sim \exp[i(K_pz - \Omega_pt)]$),可以看到,如果上式中的 K_p 用 iK_s,Ω_p 用 $i\omega$ 代替,就得到孤立子的色散关系. 因此孤立子的色散关系就相当于具有虚波数、虚频率的极化子的色散关系. 我们在图 11-3 中标出了它们之间的关系.

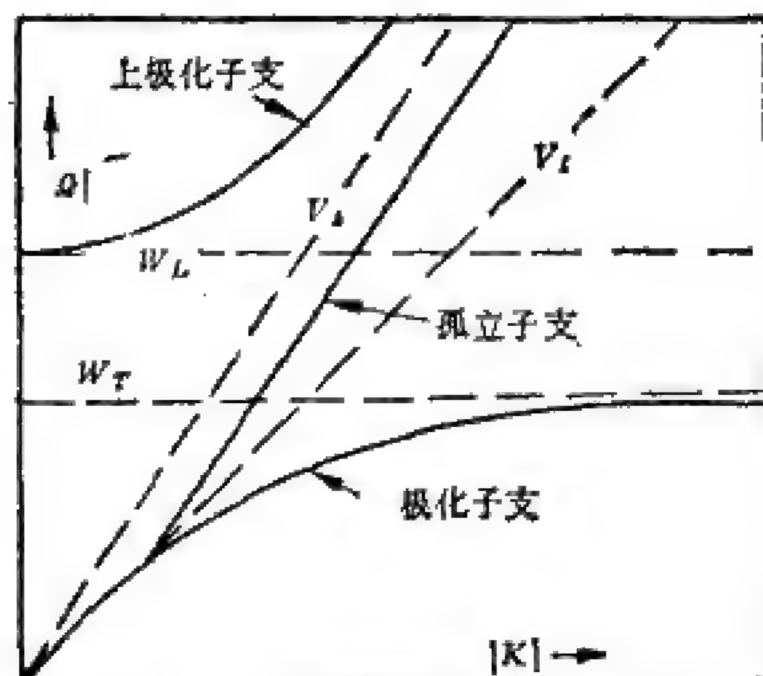


图 11-3 在耦合系统中的色散关系.

现在来讨论光学模式和声学模式的耦合系统. 这种相互作用系统可用声学波动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + A_{11}\frac{\partial y}{\partial X} \qquad (3.12)$$

和光学模式的非线性力方程

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A_{20}y - A_{40}y^3 - A_{11}\frac{\partial u}{\partial X} \qquad (3.13)$$

来描述. 这里 u 是一个声学本征模式的标量振幅, X 是在传播方向上的质点坐标, ρ 是介质的质量密度, A_{02} 是除光学模式的法向坐标 y 外的各种源产生的弹性劲度, A_{11} 是 y 与位移

梯度 $\frac{\partial u}{\partial X}$ 之间的耦合常数．其余各量意义与前面相同．

和前面的方法一样，马上可写出上两式的波包型孤立子解来，即：

$$y = y_0 \operatorname{sech} K(\xi - \xi_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{A_{11} y_0}{\rho(V^2 - V_h^2)} \operatorname{sech} K(\xi - \xi_0)$$

其中，$\xi = X - Vt$． 这里也具有如前面所示的孤立子存在条件 (3.6),(3.8),(3.9)．但现在

$V_h^2 = A_{02}/\rho$，$V_l^2 = (A_{02} - A_{11}^2/A_{20})\rho$，$\omega_L = (A_{20}/m)^{1/2}$

(A_{20}/m) 叫纵向光学频率 ω_L，而不叫横向光学频率 ω_T，是因为弹性顺度 (*elastic compliance*)(它是弹性劲度的倒数)类似于介电常数．这是由于线性波速正比于在对应情况下的每一个量的平方根的倒数的，因此上式中的那个频率对应于顺度等于零的情况，因此 $(A_{20}/m)^{1/2}$ 称为纵向光学频率．

固体中所出现的几种模式的耦合现象很多．我们可仿照此法去研究其它耦合系统的情况．

第四节 Toda 晶格孤立子的统计力学

前面我们已研究了单个孤立子的运动规律，那么由N个孤立子组成的热力学系统又怎样呢？

对于N个 Sine-Gordon 和 φ^4 场的Kink(扭结)孤立子的力学体系的统计规律和热力学量，在低温下，常可以把这样的准孤立子看成象无相互作用的声子气体一样来加以处理[15]-[19]．但对于非拓扑性的 Toda 晶格孤立子系统，其情况稍有不同[21]．

我们知道 Toda 晶格是具有最邻近相互作用的线性链．

其 Hamilton 量为:

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{P_i^2}{2m}+V(x_{i+1}-x_i)\right) \tag{4.1}$$

Toda 晶格势为:

$$V(r)=\frac{a}{b}(e^{-br}-1)+ar$$

对于小振幅的系统几乎可以认为是谐振动，其周期性的解是声子．对于高振幅的系统，其周期性的解是 Cnoidal 波． 如图 11-4 所示． 对于 Cnoidal 波可以认为是声子因非谐振所

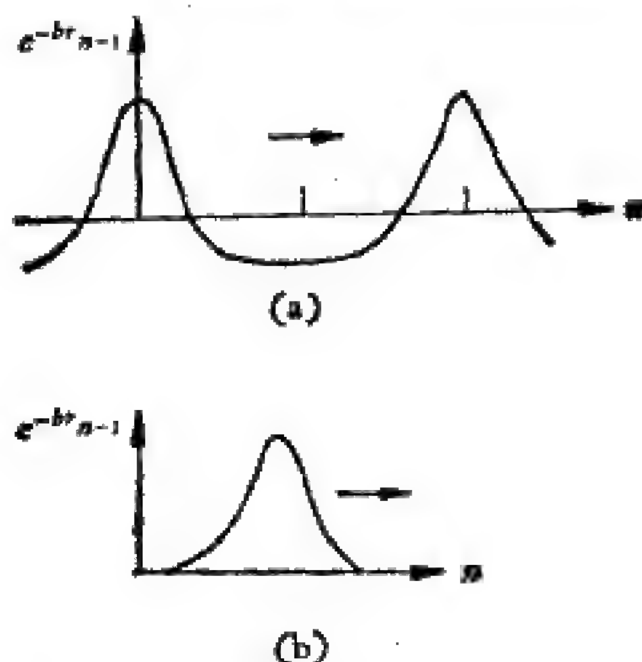


图 11-4 Cnoidal 波(a)和孤立子(b).

引起的变形．在低温下，可简约为一个声子．如果 $\lambda\to\infty$ 的 Cnoidal 波变成了一个孤立子（如图 11-4)．因此孤立子是比 Cnoidal 波更严重变形的声子．其孤立子的能量、速度为参数 α 决定．即[20]:

$$E_{kink}(\alpha)=2\,\frac{a}{b}\,\mathrm{sh}\alpha\left(\mathrm{ch}\alpha-\frac{\mathrm{sh}\alpha}{\alpha}\right)$$

$$E_{sol}(\alpha)=2\,\frac{a}{b}\,\alpha\left\{\left(\frac{\mathrm{sh}\alpha}{\alpha}\right)^2-1\right\}$$

则

$$\begin{cases} E(\alpha) = E_{kink} + E_{pot} = 2\dfrac{a}{b}(\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha - \alpha) \\ V(\alpha) = \sqrt{\dfrac{ab}{m}}\dfrac{\mathrm{sh}\alpha}{\alpha} \end{cases} \tag{4.2}$$

由前面可知：原则上，由一个孤立子可以构成N个孤立子．但是 Toda 晶格和 φ^4 场及 Sine-Gordon 系统的能谱和速度是不同的，如图 11-5 所示．在 S-G 晶格系统中其孤立

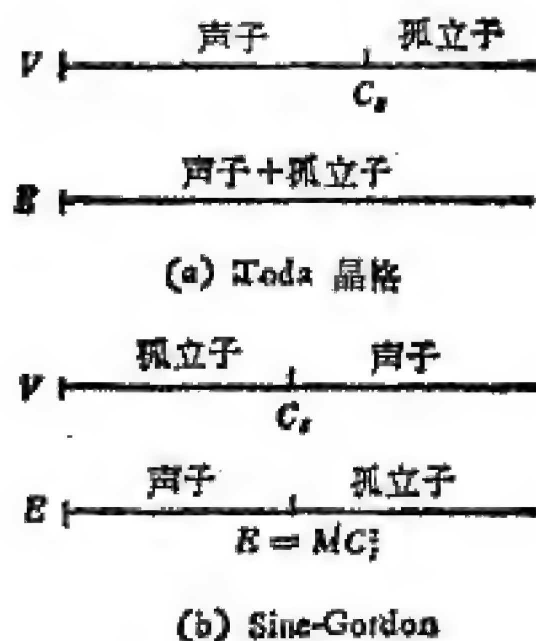


图 11-5 能谱．

子可以和相对性粒子比较，这里声速 C_s 起着光速的作用．我们需要能量去激发一个孤立子，并要给出更多的能量去使它运动．和 Toda 晶格相反，S-G 声子是不同于 Kink 激发态的．因此在一般情况下，必须使用孤立子和声子一起去描述 S-G——激发态．但 Toda 晶格远不是这样．

对于 Toda 晶格系统的 *Hamilton* 可近似表示为具有一个自由度所对应的基元激发的 Hamilton 量之和．即

$$H = H_1(P_1, Q_1) + H_2(P_2, Q_2) + \cdots + H_N(P_N, Q_N) \tag{4.3}$$

则系统的经典的配分函数为：

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \cdots \cdot Z_N, \text{ 而 } Z_i = \int e^{-\beta H_i(P_i, Q_i)} dP_i dQ_i \tag{4.4}$$

把对 P 的积分换成对能量 E 的积分，则有：

$$Z=\int \frac{\partial P(E,Q)}{\partial E} e^{-\beta E} dEdQ \tag{4.5}$$

由 Hamilton 方程：

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P},\ \dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q},\ \frac{\partial P(E,Q)}{\partial E}=\frac{1}{\dot{Q}} \tag{4.6}$$

将 t 作为新的变量，则由 (4.5) 式可得：

$$Z=\int dE \int_{H(P,Q)=E} e^{-\beta E} dt=\int T(E)e^{-\beta E}dE \tag{4.7}$$

再现(周期)时间 $T(E)$ 是这个激发通过相空间轨道为：$H(P,Q)=E$ 的整个时间。例如对于波长为 λ 的一个声子，我们有：

$$T(E)=\frac{2\pi}{\omega(\lambda)}$$

则

$$Z=\int_0^{\infty} \frac{2\pi}{\omega(\lambda)} e^{-\beta E} dE=\frac{2\pi}{\omega(\lambda)\beta}$$

对于孤立子，

$$T(E)=\frac{2N}{V(E)}$$

这里 N 是在链上的立子数，而"$V\cdot t$"是在 t 时间内这个孤立子所经过链上的立子数。2 是对于一个给定的能量 E 有两个可能的速度 V 和 $-V$。对于这个孤立子系统的配分函数 z 简化为：

$$Z_{sol}=\int_0^{\infty} \frac{2N}{V(E)} e^{-\beta E} dE \tag{4.8}$$

由于

$$Z=\sum_n e^{-\beta E_n} \xrightarrow[h\to 0]{} \int \rho(E) e^{-\beta E} dE$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\beta E} dP dq \qquad (4.9)$$

同 (4.7) 式比较，可看到 $T(E)$ 是正比于量子力学状态密度 $\rho(E)$ 的经典极限的。

我们注意其行波的速度为 V，则孤立子的位置的运动方程为：

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = V = \text{const} \qquad (4.10)$$

如果假设链是均匀的，则 H 与 Q 无关，并有

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

而 (4.10) 式可写成

$$\frac{dP(E)}{dE} = \pm \frac{1}{V(E)} \qquad (4.11)$$

则 (4.6) 式现在变成：

$$Z = \int dQ \cdot 2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{V(E)} e^{-\beta E} dE = \int_0^\infty \frac{2N}{V(E)} e^{-\beta E} dE \qquad (4.12)$$

它等值于 (4.8) 式。

对于一个孤立子的作用量 J 是正比于 $P(\alpha)$ 的。即

$$J = \sum_i \oint P_i dq_i = \sum_i \int_0^T P_i(t) \dot{q}_i(t) d(t) \qquad (4.13)$$

如果有一个孤立子存在的话，则 P_i 和 q_i 是这个孤立子的动量和坐标。根据我们定义的孤立子的坐标和动量，则有

$$J = \oint P dQ = NP \qquad (4.14)$$

这从 (4.13) 式的直接求解可看到。即

$$J = \int_0^T E_{kin}(t) dt = TE_{kin} = \frac{2N}{V(\alpha)} E_{kin}(\alpha)$$

$$= 4N \frac{a}{b} \sqrt{\frac{m}{ab}} (2\text{ch}\alpha - \text{sh}\alpha) = NP(\alpha)$$

在低温下，由于孤立子并不是 Toda 晶格的最低能态值，而声子才是，则声子的配分函数为：

$$Z_{ph}=\prod_{n=1}^{N/2}\left(\int\frac{2\pi}{\omega_n}e^{-\beta E}dE\right)^2=\prod_{n=1}^{N/2}\left(\frac{2\pi}{\beta\omega_n}\right)^2 \quad (4.15)$$

在极低温下，对于无相互作用的孤立子系统为：

$$Z_{sol}=\frac{1}{N!}\left(\int\frac{2N}{C_s}e^{-\beta E}dE\right)^N=\left(\frac{e}{N}\frac{2N}{C_s\cdot\beta}\right)^N \quad (4.16)$$

其中，$N!$ 是因为 N 个孤立子的不可区分性引起的。对于最长波长的声子有：

$$\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{\lambda_n}{V_n}\rightarrow\frac{2N}{C_s} \quad (4.17)$$

所以孤立子可以看成是长波长声子。对于一般声子有：

$$\omega_n=2C_s\sin\frac{\pi n}{N}.$$

则对于各种类型的声子的配分函数为：

$$Z_{ph}=\left(\frac{\pi}{C_s\cdot\beta}\right)^N\prod_{n=1}^{N/2}\frac{1}{\sin\frac{2\pi n}{N}}=\left(\frac{\pi}{C_s\cdot\beta}\right)^N\cdot Z^N$$

$$=\left(\frac{\pi}{e}\right)^N Z_{sol} \quad (4.18)$$

因此，Z_{ph} 和相互作用的孤立子的 Z_{sol} 是不同的。

利用以上的配分函数，可通过 $F=-\frac{1}{\beta}\ln Z_s$ 求出孤立子系统的自由能。从而也可求出比热等一切热力学量来。其方法和已熟悉的统计物理方法没有什么两样，所以这里不用介绍了。

参 考 文 献

[1] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **20** (1950), 1064.

[2] 吴杭生等，超导电性，科学出版社，1979.
[3] A. A. Abrikosv, *Zh. Eksp. Ter. Fiz*, **32** (1957), 1442.
[4] L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, B19 (1979), 4486.
[5] B. D. Josephson, *Advan. in Phys., Vol.* **14** (1965), 56, 419.
[6] B. L. Lamb, *Jr. Rev. Mod. Phys.*, **43** (1971), 99.
[7] G. Constabile, et. al., *Appl. Phys. Lett.*, **32**(1978), 587.
[8] C. Kittel, *Phys. Rev.*, **82** (1951), 729.
[9] S. Sarker, S. E. Trullinger, A. R. Bishop, *Phys. Lett.*, A59 (1976), 255.
[10] J. Lajzerowicz and J. J. Niez, Soliton and Condensed Mather Physics, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.
[11] D. G·德让纳，金属和合金的超导电性，刘长宁译，科学出版社，1980，P. 183.
[12] M. E. Lines and A. M. Glass, "Principles and Application of Ferroelectrics and Related Materials" Clarendon Press, Oxford 1977.
[13] A. C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. Mclaughlin, *Proc. IEEE.*, **61** (1973), 1443.
[14] S. A. Moskalenko, V. A. Sinyak and P. I. Khadzhi, *Sov. J. Quant. Electron*, 6 (1976), 464—465.
[15] J. A. Krumhansl and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, B11 (1975), 3535.
[16] J. F. Currie et. al., *Phys. Rev.*, B22 (1980), 477.
[17] S. E. Trullinger et. al., *Phys. Rev. Lett.*, **206** (1978), 1603.
[18] J. F. Currie et. al., *Phys. Rev.*, A16 (1977), 796.
[19] N. Gupta, B. Sutherland, *Phys. Rev.*, A14 (1976), 1790.
[20] M. Toda, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **45** (1970), 174.
[21] H. Bolterauer and M. Opper, *Z. Physica*, B42 (1981), 155.